21世纪 高等学校本科系列教材

总主编　罗固源

流体力学

(16)

梁智权　主编



43

重庆大学出版社

流体力学

梁智权 主编



重庆大学出版社

内容简介

本书是一本利用较少学时介绍流体力学基本内容的入门教材。全书共分7章,内容包括:流体的物理属性,流场及其张量表示方法,流体力学基本概念,流体力学基本方程组,流体流动守恒原理及其应用,理想不可压缩流体的运动,粘性流体的流动。每章末附有一定数量的习题,并给出了答案。

本书是为非流体力学专业的高等学校工程学科专业学生编写的40学时流体力学教材,可以作为建筑、机械、化工、水利等部门工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

流体力学/梁智权主编.—重庆:重庆大学出版社,2002.1
土木工程专业本科系列教材
ISBN 7-5624-2369-5

Ⅰ.流… Ⅱ.梁… Ⅲ.流体力学-高等学校-教材 Ⅳ.035

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第093496号

流体力学
梁智权 主编
责任编辑 曾令维
*
重庆大学出版社出版发行
新 华 书 店 经 销
重庆华林印务有限公司印刷
*
开本:787×1092 1/16 印张:11.25 字数:281千
2002年1月第1版 2002年1月第1次印刷
印数:1—4 000
ISBN 7-5624-2369-5/O·199 定价:16.00元

前言

物质按集聚状态不同，可以分为流体和固体两类物质。流体和固体的分子结构和分子间作用力性质是不同的。流体不能抵抗任何力的作用，作用在流体上的力不撤销，流体的变形将一直进行下去。真实流体都是有粘性的，流体的粘性是流体分子内摩擦的宏观表现，是流体产生涡旋运动的内因。当流体运动产生变形时，流体粘性提供抗拒流体变形的阻力。人们将理想化的无粘性流体称为理想流体。

流体力学在宏观尺度上考察流体的力学行为，是一门采用连续介质模型，研究流体的平衡和宏观运动规律以及流体与其所接触物体相互作用的学科。在连续性假定下，流体被看成是由连续分布的流体质点组成的连续介质。

理论研究、实验研究和数值计算是推动流体力学发展的三种研究方法。采用理论研究方法，首先是对流体及其运动进行合理简化和近似，设计恰当的理论模型；然后根据物理普遍定律和流体力学公式，建立描写流体运动规律的积分形式或微分形式封闭方程组，以及与之相应的初始条件和边界条件，并利用数学工具分析求解方程组以揭示流体量的变化规律；最后将解与实验或观察比较，确定解的准确度及适应范围。流体力学实验研究主要是在风洞、激波管、水洞、水槽、水电比拟等设备中进行模型试验或实物试验，能够在与所研究的问题完全相同或大体相同的条件下进行观测。尽管通过实验得出的结果一般说来是可靠的，但是实验方法往往要受模型尺寸的限制和边界条件的影响。数值计算方法可以解决理论研究无法解决的复杂流动问题，和实验相比所需的费用和时间都比较少，而且有较高的精度，因此计算流体力学已成为流体力学的重要分支学科。三种研究方法之间密切联系，取长补短，彼此影响，相互促进。

流体运动是宏观现象，人们易于观察和感知。19 世纪水力学作为流体力学在工程上的应用得到高度发展，由于那个时期从事流体力学理论研究的学者都认为流体是没有粘性的，因此得到的一些理想流体的理论结果与流体在工程中的实际应用发生矛盾。20 世纪初德国人普朗特提出边界层理论以后，才将理想流体的理论和粘性流体的工程应用统一起来，奠定了近代流体力学的基础。流体力学从本质上讲是非线性的，虽然一百余年来人类对流体力学的科学研究取得了大量重要成果，但是流体力学学科至今仍然包含着极为丰富、还未被人认识和理解的现象和规律。

流体力学对整个科学的发展起着重要的作用。20 世纪下

半叶，由于实验测试技术、数值计算手段和理论分析方法的进步，人们对流体力学中的湍流、混沌、涡动、多相流、非平衡流、渗流等基本流动现象和非线性流动理论方面的研究取得了很大进展，为科学技术进步和国民经济发展做出了重要贡献。流体力学在自然科学领域是一门重要的技术基础学科，在工程科学和技术科学领域又是一门应用性很强的工程技术学科，其应用几乎遍及国民经济的各个部门，目前已很难找出一个技术部门与流体力学没有或多或少的联系，近年来，流体力学和其他学科相互渗透，形成了一系列边缘学科。流体力学是建筑、机械、化工、食品、水利、气象、造船、航空等工程学科的重要应用基础理论之一，在生物、能源、材料、环境等高技术领域里有非常广泛的应用。

通过流体力学的理论研究，对流体流动进行科学的抽象，利用数学方法求出理论结果，可以清晰地、普遍地揭示其内在规律。流体力学理论中，粘性不可压缩流体的流动问题是流体力学研究的中心问题。研究流体粘性与流体有旋运动的必然联系，所揭示出的流体力学基本原理，是研究各个流体力学分支内容的基础，各个流体力学分支通过研究粘性不可压缩流体的流动问题，统一于流体力学学科之中。流体力学基本方程组反映了流体运动的基本规律。流体力学基本方程组的一般形式是处理流体力学具体问题的出发点。熟悉流体力学基本方程组的一般形式，有助于理解流体力学的理论结构，可以做到学习流体力学基本内容时心中有数。

现代一般流体力学专著和教材中广泛采用场论和张量等数学工具。本教材作为少学时教材，努力贯彻面向 21 世纪教材起点较高、少而精、学以致用的原则，在处理较复杂的流体力学问题时，为了使流体力学的概念表达明确、方法描述简洁，不纠缠在繁冗的数学推证过程中，编者在编写过程中，力求恰当地采用场论和张量工具，使学生不必熟练掌握高级数学技巧，就能理解流体力学基本原理，在学习流体力学基本理论时收到事半功倍的效果。

本教材试图用不大的篇幅、以统一观点和编者认为最好的形式来表述流体力学的重要概念、基本原理及其应用，力求深入浅出地阐明流体力学中的基本规律和处理问题的近似方法，给出流体力学引论性的内容，使学生获得一个比较完整的流体力学学科体系框架，为继续学习流体力学各专门分支和相关学科铺垫基础。采用本书给非流体力学专业的工程学科专业学生讲授少学时流体力学课程时，学时数不宜少于 40 学时。

本书第1章给出流体的连续介质假定后，为了理解影响流体流动的内因，讨论了流体的密度、压缩性、表面张力、扩散性、粘性和导热性等物理属性，简要叙述了流体平衡态热力学。第2章介绍了流场中必然涉及到的梯度、散度和旋度等场论知识；针对流体力学中讨论的应力张量和应变张量，着重介绍了二阶笛卡尔张量等有关张量知识，为以后章节的学习打下基础。第3章介绍的流体力学基本概念包括：作用在流体上的力，描述流体运动的拉格朗日方法和欧拉方法，速度分解定理和变形速度张量，流体微团的运动分析，静止流体中的压力分布。这一章纳入了流体静力学的基本内容，没有安排流体静力学独立成章。第4章通过质量守恒定律、动量定理和能量守恒定律，导出了流体力学的积分形式和微分形式的连续性方程、运动方程和能量方程，通过本构方程给出应力应变关系，结合状态方程，建立起流体力学基本方程组，同时建立了相应的初边界条件。第5章介绍流体流动中的守恒原理及其应用，通过欧拉方程的第一积分，导出伯努利方程这一非常重要的机械能衡算式。在这一章里，采用控制体方法，分别应用一维连续性方程、伯努利方程、动量定理和动量矩定理，对一些典型例题进行了分析计算。第6章介绍理想不可压缩流体的流动，着重介绍了有势流动和二维无旋流，并给出了均匀流、径向流、环流和偶极流等基本无旋流的势函数和流函数的表达式，讨论了理想流体绕圆柱的流动。这一章的最后介绍了涡旋运动的基本性质及其判别方法。第7章介绍了粘性流体流动的基本性质，叙述层流向湍流转化的临界雷诺数条件；描述了流体动力相似原理，提出流体动力相似准则；利用圆球绕流介绍了小雷诺数流动的特点；对于大雷诺数流动，主要介绍了平面边界层理论，建立了普朗特边界层方程，讨论了摩擦阻力；在边界层理论的基础上，介绍了涡旋诱发振动的基本概念和润滑理论；本章末以管流的讨论作为结束。

本书由梁智权主编，昆明理工大学冯燕参加了第3章流体静力学基本内容和第5章流体流动守恒原理的编写。由于篇幅和学时的限制，书中没有涉及湍流理论和高速空气动力学理论，对于已经触及的内容也是挂一漏万，而且讨论很不深入。但是作为少学时的流体力学理论教材，学生如果能够熟练掌握书中提供的基本内容，在今后进一步深入学习和应用流体力学理论时就有了可靠基础。本书在编写过程中，得到许多同志的关心、指导和帮助，在这里一并对他们表示衷心感谢。

编 者

2001年12月

目录

第 1 章 流体的物理属性

流体力学是一门建立在连续介质假定之上研究流体平衡规律、流体宏观运动规律以及流体与所接触物体之间相互作用的学科。流体力学的研究对象是流体，流体的物理属性诸如密度、压缩性、扩散性、粘性和表面张力是流体分子微观作用的宏观表现，它们是引起流体运动状态变化的内因。

1.1 流体与连续介质假定

从力学特征来讲，流体与固体不同，流体是易流动的物质。对于任何微小的切向应力，只要持续地施加在流体上，流体便在切向应力作用下持续流动并发生任意大的变形。因此流体在静止状态时只承受法向应力，不承受切向应力。流体的流动性是由流体分子微观结构所决定的。从流体分子运动的角度去研究流体的平衡和运动规律显然是很困难的。流体力学不去考察个别分子的微观运动情况，而是采用连续介质假定，着眼于由大量分子组成的流体质点的宏观运动规律。

1.1.1 物质形态

(1)物质分子间作用力

物质的宏观性质和存在形态，与它们的分子结构和分子间作用力的性质有关。两个孤立分子的中心距的量级为 10^{-8}cm 时，其相互作用是很强的量子力，当分子电子层的电子有可能交换时，分子间的力是吸引力并构成化学键；当电子不可能交换时，分子间的力是排斥力，而且随着分子之间距离增大迅速衰减。如果两个分子中心之间的距离再大一些，达到 $10^{-7}\sim10^{-6}$ cm 的量级时，分子之间的相互作用是微弱的吸引力。没有形成化学键的两个分子之间的相互作用力，与它们的中心距的函数关系如图 1.1 所示。对于大多数简单分子，分子间的距离 $d_0=3\times10^{-8}\sim4\times10^{-8}$cm。当分子间的距离为 d_0 时，相互作用力将改变符号，这时一个分子相对于另一个分子处于稳定平衡位置。

(2)物质存在形态

温度变化对物质形成固态、液态和气态是有明显影响的。温度较低时，分子运动不剧烈，

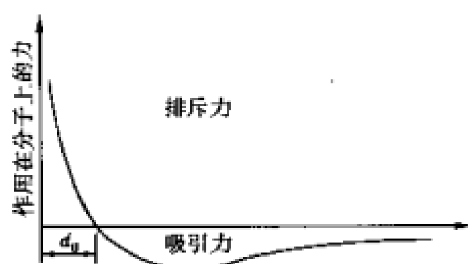


图 1.1 物质分子间作用力与距离的关系

分子间的距离是 d_0 的数量级，分子间的相互作用力是数值很大的量子型强作用力，分子只能在各自的平衡位置作微振动，物质形态表现为具有一定形状和体积的固体状态。

当温度升高时，分子运动变得剧烈起来，分子之间的距离增大，作用力变为量子型强作用力与经典型弱作用力混合的中等作用力。温度升高达到某一温度时，分子不能维持在固定平衡位置附近作微振动，但是分子间的作用力还能维持分子彼此不远离分散，物质形态表现为不能维持一定形状但仍有一定体积的液体状态。温度继续升高，分子运动程度变得很激烈，分子间的距离达 $10d_0$ 的数量级时，作用力已非常微弱，分子相互分散远离，近似作自由运动，物质形态表现为没有固定形状和大小的气体状态。液体和气体是易于流动的物质，人们通常将液体和气体称为流体。

在 0℃ 和 1 标准大气压（1 标准大气压 = 101.325kPa）的条件下，$1cm^3$ 体积中的气体分子数是 2.69×10^{19}，也就是说气体密度大约为液体密度的 1/1 000。在上述条件下，$1cm^3$ 体积中的气体分子 1s 内要碰撞 10^{29} 次。可以计算出，一个气体分子在两次碰撞间所经过的平均距离为 7×10^{-6}cm，约为 $200d_0$ 的数量级。因此气体分子间距离很远，分子偶尔发生碰撞外，大都作自由运动，在动力学上是孤立的，这决定了气体具有许多独特性质。液体的某些分子特性介于固体与气体之间。液体分子随机热运动的振幅与 d_0 的数量级相同，固体分子随机热运动的振幅远小于 d_0，气体分子随机热运动的振幅远大于 d_0。固体中的分子排列有序，气体中的分子排列无序，液体中的分子排列部分有序。

(3) 流体的易流动性

流体具有的易流动性，力学上表现出它们在静止时不能承受切向应力，因为，不管多么小的切向应力，都将使流体发生流动。如果持续对流体施加切向应力，流体可以产生任意大的变形。固体没有流动性，在静止时不仅可以承受法向应力，还可以承受切向应力。一般情形下，固体受到切向力作用时，会沿切线方向发生微小变形，达到平衡状态后，在切向力作用的截面上承受切向应力。实际上固体和流体的区别不是绝对的。有些物质具有固体的性质，也有流体的性质，不能把物质存在的形态截然分为固体和流体。大多数固态物质融（熔）化为液态时，密度变化了百分之几，分子间距只有微小变化，却引起液态物质具有流动性这样巨大的变化。

液体的密度量级很接近于固体，而其流动性完全与气体类似。一般来说，物质处在液相时的密度远大于它处于气相时的密度，导致要使液体和气体产生一定的加速度，所需要的力大小不同，但是在这两种情形下决定变形率的微分方程却具有相同的形式。人们至今对液体宏观结构的了解比对气体的了解少得多，因为对液体不能像对气体那样，借助其单个分子的性质来解释人们观测到的液体流动特性。

1.1.2 流体的连续介质假定

从流体分子运动的角度去研究流体的平衡和运动规律显然是很困难的。人们在观察流体的宏观结构和运动时，发现在时间和空间上与流体的微观结构和运动不同。流体的宏观结构和运动明显地呈现出均匀性、连续性和确定性，流体力学研究的正是流体这种宏观特性。流体

的宏观特性是大量流体分子的统计平均特性。流体的压缩性、扩散性、导热性、粘性等物理属性，都是流体分子热运动和分子之间作用力的宏观表现。

(1)连续介质假定

人们研究流体的宏观特性时，近似认为真实流体是由流体质点连续地、没有任何空隙地充满整个流动空间的连续体，这就是流体的连续介质假定。

在连续介质假定下，流体的基本组元是流体质点，每个流体质点都是微观上无穷大、宏观上无穷小的包含大量流体分子的分子团。人们基于连续介质假定的流体质点模型，对于反映流体宏观结构和运动的流体特征量（流体量），如密度、速度、压力、温度等，所观察到和感知到的都是均匀的、连续的和确定的。

流体力学涉及的是由大量流体分子组成的流体质点的宏观运动规律，关注整个流动空间中流体量的变化情况，不需要直接考察个别流体分子的微观运动情况，即不去着眼于向流体分子平均自由程（在 0℃和 1 标准大气压下，气体分子平均自由程为 7×10^{-6}cm）那样微小距离上的差异。人们在流体力学的研究和应用中，提出连续介质假定，采用连续介质这种理想化的简单物理模型，来模拟真实流体在宏观运动中表现的力学行为。因此，连续介质假定巧妙地回避了采用流体微观结构模型可能遇到的困难，即分子运动在时间和空间上具有的不均匀性、离散性和随机性。

流体的连续介质模型是代替真实流体结构的一种简化的物质结构模型。引入连续介质假定以后，流动空间中每一个由流体质点占据的几何位置都有了确定的物理意义，因此可以用空间位置上定义的物理量（如密度、压力、速度、温度等）来描述流体流动系统。由流体质点上确定的物理量所定义的函数空间，称为流场。流场中的物理量是时间和空间坐标的连续函数，利用数学分析中连续函数等数学工具，能够简化对于流体的平衡和运动的研究和计算。

(2)假定的适用范围

连续介质假定有广泛的适用范围，但是，并不是到处都适用。当分子距离与考察物体的尺度相当时，连续介质假定就失效了，例如，高层空间的稀薄气体对于人造卫星就不能当作连续介质来处理，因为，这种情况下稀薄气体分子的平均自由程已经与人造卫星的尺度相当。

连续介质模型中的流体质点是指尺度为 L 的分子团，它应该具有所包含的大量流体分子的统计平均特性。微观上，流体质点的尺度 L 充分大，远大于流体分子平均自由程 L_0；宏观上，流体质点的尺度 L 充分小，即 L 远小于所研究的流体流动问题的特征尺寸 L_1，即

$$L_1 \gg L \gg L_0 \tag{1.1.1}$$

应该注意到，分子团内流体量的统计平均值，是随分子团的尺度 L 大小而变化的。作为连续介质模型中的流体质点，其分子团的尺度 L 必须满足(1.1.1)式给定的条件，才能使流场中任一点的流体量具有稳定不变的统计平均值。如果分子团的尺度 L 接近流体分子平均自由程 L_0，或与流动问题的特征尺寸 L_1 有可比性，都不能作为连续介质模型中的流体质点来处理，这种情况下连续介质假定失效。

密度的概念包含了连续介质假定，利用流体密度的概念可以说明连续介质假定的适用范围。密度 $\rho=\rho(x,y,z)$ 一般是位置 x,y,z 的函数，其定义为

$$\rho = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$$

其中，Δm 是微小体积 ΔV 中的质量。包含给定体积 V 中的质量为

$$M = \int_V \rho(x,y,z)\mathrm{d}V$$

密度定义认为，对于任何微小的体积，密度都有确定的数值。事实上，如果所取尺度是流体分子的尺度，密度值因体积变化会有很大差异，如图 1.2 所示。

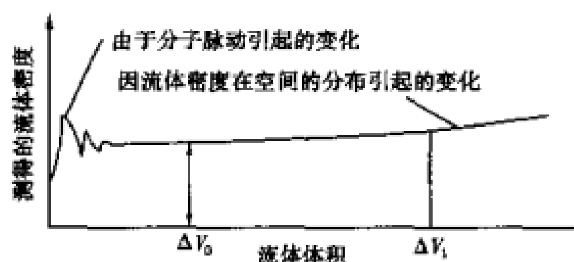


图 1.2　流体分子团尺度对密度的影响

图中显示出，当分子团体积 ΔV_0 的尺度太小，以至于数量上与分子平均自由程 L_0 同阶，由分子团中少数不规则运动的分子给出的密度值 ρ 是脉动的，并出现很大的随机性；当分子团体积 ΔV_1 的尺度太大，以至于数量上与所研究的流体流动问题的特征尺寸 L_1 相当，分子团内密度的统计平均值就会直接反映密度在流场（密度场）中分布的不均匀性。流体分子团的尺度满足(1.1.1)式给定的条件，才能视为连续介质假定中的流体质点，成为连续介质模型中的组成单元，密度值 ρ 在流场中每一点也才能取得确定的数值。

除了对于分子团的尺度进行统计平均时要求满足(1.1.1)式给定的条件，类似地，还应在对时间 T 的长短进行统计平均时，要求满足微观充分长、宏观充分短的条件，即

$$T_1 \gg T \gg T_0 \tag{1.1.2}$$

式中 T_1 是所研究问题的特征时间，T_0 是分子相邻两次碰撞的时间间隔。(1.1.2)式表明，一方面进行统计平均的时间从微观上应选得足够长，在这段时间内分子碰撞已进行了很多次，使得在这段时间内进行统计平均能够得到稳定的数值。另一方面，进行统计平均的时间从宏观上应选得比特征时间小得多，以便能够将进行统计平均的时间看成为一个瞬间。平均物理量与统计平均时间的关系类似图 1.2 表示的曲线。

连续介质假定是流体力学中的一个基本假定。利用连续介质假定导出的流体力学基本方程和计算结果，与大量实验结果是吻合的，表明了连续介质假定的实用性和合理性。

1.2　流体的密度、压缩性和表面张力

流体的密度、压缩性和表面张力是流体的重要物理属性。流体的密度表征流体在流场空间某点质量的密集程度，它与流体的压缩性有密切的关系。流体的压缩性是用单位压强所引起的体积变化率来表示的。流体的体积随压强增大而缩小，随温度的升高而膨胀。任何流体都是可以压缩的，只是可压缩的程度不同。在很多情况下，流体力学中往往采用不可压缩流体模型来简化复杂的流体流动问题。所谓流体不可压缩，是指流场空间中每一点的密度是不随时间变化的常数。按照密度的定义，不可压缩流体质量守恒时，其体积也不随时间变化。除了流体的密度、压缩性外，液体与气体、液体与固体交界面的表面性质，特别是液体自由表面的表面张力及其引起的毛细现象，在一些科技和工程应用领域也受到密切关注。

1.2.1　流体的密度

一般情况下，同一时刻在流场不同位置的流体密度是不同的，也就是说，流体密度 ρ 是位

置 x,y,z 的函数，即

$$\rho = \rho(x,y,z) \tag{1.2.1}$$

(1) 平均密度

如果流体是均匀的，通过测定已知体积 V 中的流体质量，或者测定已知流体质量 M 占据的体积，可以确定流体的平均密度。平均密度可表示为

$$\rho = \frac{M}{V} \tag{1.2.2}$$

式中密度 ρ 是流场单位体积内所具有的质量，其单位为 kg/m^3。

(2) 密度的定义

流场中一点处的流体密度由下面的极限来定义：

$$\rho = \lim_{\delta\tau\to 0}\frac{\delta m}{\delta\tau} = \frac{dm}{d\tau} \tag{1.2.3}$$

式中 $\delta\tau$ 是流场中围绕指定点的微元体积，δm 是包含在微元体积中的流体质量。以后分析流体流动问题时，将有限体积 V 的符号改写为 τ，用 $\delta\tau$ 表示流体的微元体积。

由(1.2.3)式得到流体质量的微分形式为

$$dm = \rho d\tau \tag{1.2.4}$$

对于包含在有限体积 τ 中的流体质量，可以表示成密度在该体积中的积分

$$M = \int_\tau \rho(x,y,z)d\tau \tag{1.2.5}$$

(3) 比容(比体积)

流体密度的倒数称为比容(比体积)，用 v 表示，即

$$v = \frac{1}{\rho} \tag{1.2.6}$$

比容是单位质量流体所占有的体积，它的单位为 m^3/kg。

(4) 液体的相对密度

某一液体的密度 ρ_f 与温度为4℃水的密度 ρ_w 的比值通常称为该液体的相对密度，用符号 d 来表示，即

$$d = \frac{\rho_f}{\rho_w} \tag{1.2.7}$$

(5) 混合气体的密度

混合气体的密度可根据各组分气体所占体积的百分数按下式计算：

$$\rho = \rho_1\alpha_1 + \rho_2\alpha_2 + \cdots + \rho_n\alpha_n = \sum_{i=1}^{n}\rho_i\alpha_i \tag{1.2.8}$$

式中 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n$ 分别是混合气体中各组分气体的密度，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 分别是混合气体中各组分气体所占体积的百分数。表1.1列出了常用流体的密度。

(6) 不可压缩流体

一般情况下，近似把液体看成是不可压缩的。由于气体比液体的压缩性大得多，对于气体应该按可压缩流体来处理。然而，在气流的速度比音速小得多的情况下，如果气流受到的压力改变很小，使气体产生的体积变化不大，可以认为气体也是不可压缩的。为了简化计算，按压缩性可以将流体分为不可压缩流体和可压缩流体。显然，不可压缩流体只是真实流体在给定

条件下关于压缩性的近似模型。

表 1.1 常用流体的密度

流体名称	温度/℃	密度/($kg \cdot m^{-3}$)	流体名称	温度/℃	密度/($kg \cdot m^{-3}$)
空气	0	1.293	蒸馏水	4	1 000
二氧化碳	0	1.976	汽油	15	700 ~ 750
二氧化硫	0	2.927	酒精	15	790 ~ 800
氧气	0	1.429	煤油	15	800 ~ 810
氢气	0	0.089	润滑油	15	890 ~ 920
水蒸气	0	0.804	水银	15	13 600
氮气	0	1.251	海水	15	1 020 ~ 1 030

真实流体都是可压缩的，其密度不仅是位置 x,y,z 的函数，还是时间 t 的函数，即

$$\rho = \rho(x,y,z,t)$$

对于均匀流体，如果当作不可压缩流体来处理，流体密度是不随时间改变的常量，即

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

对于非均值的不可压缩流体，流场中各点密度不同，但是各点密度不随时间改变，可表示为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

流体流动问题中，诸如水流和低速大气流常常被当作不可压缩流体来研究，这一大类流体是人们在工程实际和科学研究时经常遇到的。采用不可压缩流体模型来模拟水流和低速大气流等真实流体，使复杂的流体力学的研究工作得到很大简化。

1.2.2 流体的可压缩性

流体质点的体积或密度可以随压力或温度改变的性质称为流体的压缩性。在通常的压力或温度下，液体比气体的压缩性小得多，而且在相当大的压力范围内，液体的密度几乎是常数。例如，水在温度 20℃ 下，压力每增加 1 标准大气压，它的体积仅比原体积约缩小 0.005%。液体和气体力学性质最重要的差别在于它们的体积弹性，即可压缩性不同。气体远比液体容易压缩，在有显著压力变化的流体运动中，气体产生的比容变化要比液体大得多。

(1)压缩性系数

单位压强所引起流体的体积变化率称为压缩性系数，以 k 表之。当温度不变时，压缩性系数由下式确定：

$$k = \frac{\delta V/V}{\delta p} = \frac{\delta V}{V\delta p} \tag{1.2.9}$$

式中 δp 为压强增量，$\delta V/V$ 为流体的体积变化率。上式中的负号表示 δp 与 δV 异号，因为压强增大，流体体积缩小。压缩系数是用来描述流体压缩性的物理量，其单位是 m^2/N。在相同的压强增量下，k 值大的流体，其体积变化率大，较易压缩。

(2)体积模量

工程中常用体积模量去衡量流体压缩性的大小。压缩系数的倒数叫做体积模量，用 K 表示

$$K = \frac{1}{k} = \frac{V\delta p}{\delta V} \tag{1.2.10}$$

K 的单位与压强相同，K 值大的流体，可压缩性小。

(3) 体胀系数

单位温升所引起流体的体积变化率称为体胀系数，以 α_V 表之。当温度不变时，体胀系数由下式确定：

$$\alpha_V = \frac{\delta V/V}{\delta T} = \frac{\delta V}{V\delta T} \tag{1.2.11}$$

式中 δT 为温度增量，$\delta V/V$ 为流体的体积变化率。上式中 δT 与 δV 同号，因为温度升高，流体体积膨胀。体胀系数是用来描述流体膨胀性的物理量，其单位是 1/℃ 或 1/K。当温度低于 50℃时，水的体胀系数 α_V 随压强的增加而增大；当温度高于 50℃时，水的体胀系数 α_V 随压强的增加而减小。

(4) 完全气体的状态方程

描写气体压力 p、体积 V 和温度 T 之间关系，对研究气体的性质是十分重要的。处于平衡状态的均匀流体系统，其压力 p、体积 V 和温度 T 由状态方程联系起来，即

$$F(p, V, T) = 0 \tag{1.2.12}$$

或

$$p = f(T, V) \tag{1.2.13}$$

完全气体的状态方程是最简单的，在热力学计算中得到了广泛应用。完全气体的状态方程为

$$pV = \frac{m}{M}R_0 T \tag{1.2.14}$$

其中 m 是气体质量；M 是气体分子量；R_0 是克分子气体常数。R_0 是普适常数，在国际单位制中，$R_0 = 84.789 \times 10^{-2}$ J/(mol·K)。完全气体在热力学中称为理想气体。为了不和理想流体的概念发生混淆，流体力学中便将理想气体叫做完全气体。人们对完全气体的分子模型作了如下假定：气体由大量分子组成，分子的大小、质量和性质都相同；气体分子间的距离比分子自身的直径大得多；分子总是充满并均匀分布在所占据的容器空间；分子不停地进行着高速且无规则的运动；分子之间的碰撞或分子与容器壁的碰撞是完全弹性的，没有动能损失；分子运动遵循经典力学的三个定律。

对于1克分子气体($m = M$)，(1.2.14)式变成

$$pV = R_0 T \tag{1.2.15}$$

对于均质液体，密度几乎不随压力和温度而改变，其状态方程为

$$\rho = 常数 \tag{1.2.16}$$

1.2.3 液体的表面张力

液体分子之间的吸引力作用范围很小，为分子间距离的 3～4 倍的球形范围内，球形范围的半径 $r = 10^{-8} \sim 10^{-6}$ cm。如果分子距离自由液面等于或大于半径 r，则在分子吸引力作用的球形范围内的分子处于平衡状态。如果分子距离吸引力小于半径 r，在分子吸引力作用的球形范围内的分子不能处于平衡状态，而是受到从自由液面向下作用的分子吸引力的合力。由于自由液面的上面部分没有分子，处于自由液面上的分子受到向下作用的合力达到最大值。

自由液面下小于半径 $r=10^{-8}\sim10^{-6}$cm 的流体薄层称为液体的表面层。

液体的表面层内的分子距离自由液面均小于半径 r,所以都受到向下的表面拉力,从而将液体的表面层紧紧地拉向液体内部。液体分子进入表面层需要克服分子吸引力做功,因此,向自由表面输入的机械功以表面势能的形式储存起来。自由表面的增加意味着自由表面能的增加,需要向自由表面输入机械功才能实现。自由表面的减少意味着自由表面能的减少,于是自由表面要向周围释放能量。自由表面收缩时受到的拉力对自由表面做负功,因此自由表面处于拉伸状态。定义自由表面上单位长度的拉力为表面张力,记为 σ,单位为 N/m。所有液体的表面张力随温度上升而下降。添加某些有机溶液或盐类,可以改变液体的表面张力。一定量的液体在表面张力作用下,其形状总是取自由表面能为最小时的形状。

处在气液界面、互不相溶的两种液体界面或某些液固界面附近液体,由于分子间相互作用的各向异性,液体表面发生弯曲将产生表面张力。表面张力同其他作用力相比很小,通常可以忽略。但是研究毛细现象的影响时,必须考虑流体表面张力的作用。

平衡状态时,受表面张力作用的流体曲面两侧的压力差,是由表面张力引起的附加应力,称为毛细压力。毛细压力与表面张力的关系,可以通过分析弯曲的微元表面的受力平衡情况得到,如图 1.3 所示。

取边长为 δL_1 和 δL_2 的矩形微元曲面,曲边 δL_1 的曲率半径为 R_2,曲边 δL_2 的曲率半径为 R_1。微元曲面上单位长度的表面张力为 σ,作用在曲边 δL_1 上的力为 $\sigma\delta L_1$,作用在 δL_2 上的力为 $\sigma\delta L_2$。

若作用于 δL_1 对应边上的二力夹角为 $\delta\beta$,二力合力则为 $\sigma\delta L_1\delta\beta$;若作用于 δL_2 对应边上的二力夹角为 $\delta\alpha$,二力合力则为 $\sigma\delta L_2\delta\alpha$。作用在微元曲面 $\delta L_1\delta L_2$ 上的压力差为 $(p_1-p_2)\delta L_1\delta L_2$。微元曲面的力平衡方程为

$$(p_1-p_2)\delta L_1\delta L_2=\sigma\delta L_1\delta\beta+\sigma\delta L_2\delta\alpha \qquad (1.2.17)$$

式中夹角 $\delta\beta,\delta\alpha$ 可表示为

$$\delta\beta=\frac{\delta l_2}{R_2},\delta\alpha=\frac{\delta l_1}{R_1}$$

将上式代入(1.2.17)式得

$$(p_1-p_2)=\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \qquad (1.2.18)$$

上式表明毛细压力与表面张力成正比,与曲率半径成反比。对于球形液滴,曲率半径为球半径 R,压力差为毛细压力 δp,于是(1.2.18)式改写为

$$\delta p=\frac{2\sigma}{R} \qquad (1.2.19)$$

$\delta\alpha$ $\sigma\delta L_2$ $\delta\alpha$ R_1 $\delta\beta$ R_2 $\sigma\delta L_1$ $p_1\delta L_1\delta L_2$ $\sigma\delta L_2$ $\sigma\delta L_2$ δL_2 δL_1 $\sigma\delta L_1$ $p_2\delta L_1\delta L_2$

图 1.3　微元曲面的表面张力

由上式可知,球形液滴半径愈小,液滴内部毛细压力愈大。液体的表面张力随温度升高而降低。表 1.2 列出了温度 20℃时的液体与空气接触时的表面张力。

液体中溶有其他物质时,表面张力将随物质浓度不同而发生变化。水中溶入醇、酸、醛、酮等有机物质时,其表面张力将减小;水中溶入氯化钠、硫酸钠等无机盐类时,其表面张力略有增大。溶质在液体表面层的浓度和液体内部的浓度是不同的。溶质在液体中分散不均匀的现象称为吸附。使液体表面层浓度大于液体内部浓度的作用称为正吸附;使液体表面层浓度小于

液体内部浓度的作用称为负吸附。能够被正吸附并因此显著降低溶液表面张力的物质，称为表面活性物质。表面活性物质对两相流动有显著影响。

表1.2　温度20℃的液体与空气接触时的表面张力

流体名称	表面张力/(N·m^{-1})	流体名称	表面张力/(N·m^{-1})
水	0.073 1	煤油	0.022 3～0.032 1
乙醇	0.022 3	原油	0.022 3～0.037 9
水银	0.513 7	苯	0.028 9
润滑油	0.035 0～0.037 9	四氯化碳	0.026 7

当液体与固体壁面接触时，液体分子和固体分子之间的吸引力称为附着力。若液体的内聚力小于它与固体的附着力，液体便浸润固体壁面，并沿固体壁面伸延展开；若液体的内聚力大于它与固体的附着力，液体自身聚缩成一团，不浸润固体壁面。例如水银不会浸润玻璃壁面，水要浸润玻璃壁面，而水不浸润油腻的固体壁面。

1.3　流体分子的扩散性、粘性和导热性

流体是由大量运动着的分子组成的。物质结构理论告诉我们，在任意物质的1个克分子中，含有相同数目的分子，这个数目等于阿伏迦德罗数 $N=6.023\times10^{23}$ 克分子$^{-1}$。1cm^{3}体积中的液态水中含有 3.34×10^{22} 个水分子，如果认为液态水中的水分子是彼此紧密排列的，那么每个水分子的体积约为 3×10^{-23} cm^3，其线度约为 3×10^{-8} cm。实际上，流体分子间的真空区域的尺度远大于分子本身。构成流体的每个分子都无休止地作不规则的运动，这种运动只和流体的温度有关。流体分子在运动过程中，通过相互间不停地碰撞，彼此交换动量和能量。流体微观结构中的分子运动，在时间和空间上都具有不均匀性、离散性和随机性。

1.3.1　流体分子的储运现象

由于流体分子不规则的运动，在各层流体之间交换着质量、动量和能量。在组分不同的流体混合物中，存在分子运动的质量传递。当高浓度组分的分子通过一个面积元进入低浓度的组分时，由于分子迁移发生质量储运，宏观表现为物质的扩散性。分子运动的动量传递是在相邻分子相互作用时发生的。当分子之间距离很近，存在量子型强作用力，或者发生分子碰撞的情形，这种分子间的相互作用发生动量储运，形成流体分子的内摩擦，宏观表现为流体的粘性。分子运动的能量传递是在能量不相同的流体分子之间发生的，宏观上表现为流体的导热性。统计物理的办法是从分子和原于的运动出发，采用统计平均的方法建立宏观物理量满足的方程，并确定流体的性质。虽然这个方法可以导出热力学三大定律，在气体的分子运动论方面，对分子碰撞作某些简化假设后可导出正确的宏观过程，但某些分子输运系数的值还不能准确地得出。至于液体输运过程的理论迄今为止还不完善。流体的扩散性、导热性和粘性是流体分于微观作用的宏观表现，它们是引起流体运动状态变化的内因。

流体混合物存在浓度差时，在组分不同的流体混合物中，存在分子运动的质量传递。当分

子之间发生碰撞，或者距离很近时（存在量子型强作用力），由于分子间的相互作用，在速度不同的相邻流体层之间，存在分子运动的动量传递。温度较高的气体层分子通过热运动进入温度较低的气体层，将使其温度升高，温度较低温气体层分子的平均动能增大；而低温气体层分子进入高温气体层，则使其温度降低，高温气体层分子的平均动能减小。因此，在能量不相同的流体分子之间，由于分子运动会发生能量传递。由于流体分子不规则的运动，在各层流体之间交换着质量、动量和能量，流体分子运动的这种性质叫做储运现象。

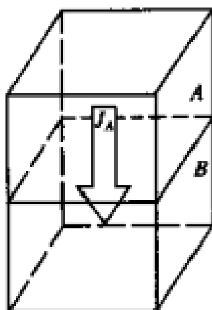


图 1.4　分子扩散示意图

1.3.2　流体的扩散性

当静止的流体混合物中存在浓度差时，由于分子不规则运动，存在浓度高的组元将向浓度低的组元输送流体质量的微观机制，在各层流体之间不停地交换质量，使不同流体层内的质量均匀化。这种分子运动具有的质量输运性质，宏观上称为扩散现象。表示流体扩散性质的物理量是扩散系数。

由 A、B 组分组成的流体混合物中，如图 1.4 所示，A 组分的浓度为 C_A，单位时间内 A 组分通过单位面积向 B 组分扩散，A 组分质量的扩散速率为 J_A，在扩散方向 y 上的浓度梯度为 $\mathrm{d}C_A/\mathrm{d}y$，流体的分子扩散现象可写成

$$J_A = -D_{AB}\frac{\mathrm{d}C_A}{\mathrm{d}y} \tag{1.3.1}$$

式中 D_{AB} 称为扩散系数，负号表示扩散方向与浓度梯度方向相反。(1.3.1)式称为费克定律，是表示分子运动质量传递规律的方程式，可以表述为：由 A、B 组分组成的混合物内，A 组分的扩散速率 J_A，与扩散方向 y 上的浓度梯度 $\mathrm{d}C_A/\mathrm{d}y$ 成正比。

扩散系数表示单位浓度梯度下 A 组分向 B 组分扩散的能力，其定义为

$$D_{AB} = J_A/\left(-\frac{\mathrm{d}C_A}{\mathrm{d}y}\right) \tag{1.3.2}$$

扩散系数随温度、压力和组成的变化而变化。

当宏观静止的流体混合物中存在浓度差时，由于分子不规则运动，存在浓度高的组元将向浓度低的组元输送流体质量的微观机制，在各层流体之间不停地交换质量，使不同流体层内的质量均匀化。这种分子运动具有的质量输运性质，在宏观上称为扩散现象。

1.3.3　流体的粘性

处于静止状态的流体不能抵抗剪切力，在任何微小剪切力作用下都将发生任意大的变形，因此流体不能保持一定的形状。但是，当变形速度增大时，流体会表现抵抗变形的一定能力；运动一旦停止，流体的抵抗力便立即消失。流体受到剪切力作用时抵抗变形的特性称为流体的粘性。

当相邻流体层以不同速度运动时，分子热运动引起的两个流体层之间的动量交换现象，在静止流体情况下是没有的。由于流体有粘性，与壁面紧贴的一层流体与器壁不发生相对运动，这种现象称为粘性流体的无滑移现象。考察流体在平面上沿 x 方向作平行流动，在平面的法线方向不同的流体层的流体质点具有不同的流动速度。

A、B 两层速度不同的流体层，如图 1.5 所示。A 层流体宏观运动速度较大，该层分子具有

较大的动量，进入 B 层后与 B 层流体分子不断发生碰撞，使 B 层流体加速；B 层分子具有较小的动量，进入 A 层后与 A 层流体分子不断发生碰撞，使 A 层流体减速，从而导致 A、B 两层流体动量发生变化，进行动量传递。由于不同速度层分子之间的动量传递以及相互引力的作用，在相邻流体层之间产生内摩擦，存在一个平行于流体层的剪切力，这种相邻流体层之间由于内摩擦产生的剪切力就是粘性阻力。流体层上的局部应力是切应力，它是流体层单位面积上的剪切力。

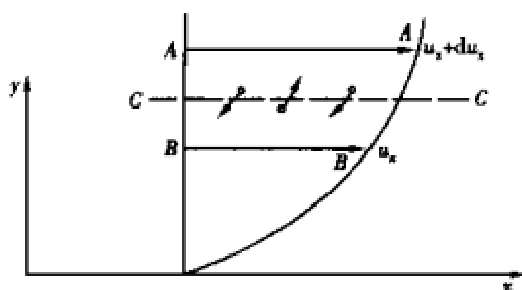


图 1.5　分子动量传递

由于流体有粘性，当流体沿壁面运动时，紧靠壁面的一层流体将不作相对于壁面的宏观运动。沿壁面的法线方向，离开壁面的不同流体层具有不同的速度，离壁面愈远的流体层速度愈大。

如果作平行直线运动相邻流体层中，某一流体层以速度 u_x 沿 x 轴方向作直线运动，沿流体层法线 y 轴方向的速度梯度可以用 du_x/dy 表示，速度梯度是法线单位距离上的速度改变量。实验证明，多数流体作直线运动时，相邻流体层之间的切应力 τ_{yx} 与速度梯度 du_x/dy 成正比

$$\tau_{yx}=\mu\frac{du_x}{dy} \tag{1.3.3}$$

式中切应力 τ_{yx} 的下标，第一个字母 y 表示切应力的作用面的法线与 y 轴方向相同，第二个字母 x 表示切应力的方向；系数 μ 称为动力粘度，简称粘度；速度梯度 du_x/dy 可以理解为剪切变形速率。上式称为牛顿粘性定律。满足牛顿粘性定律的流体称为牛顿流体。

粘度 μ 是物性常数，按(1.3.3)式可以定义为

$$\mu=\tau_{yx}/\left(\frac{du_x}{dy}\right) \tag{1.3.4}$$

在国际单位制(SI 制)中，粘度单位是 $N\cdot s/m^2$ 或 $Pa\cdot s$。在 CGS 制中粘度单位是 $dyn\cdot s/cm^2$，这一单位也称为“泊”(P)，1 泊 $=10^2$ 厘泊(cP) $=10^{-1}N\cdot s/m^2$。粘度与温度有关，低密度气体的粘度随温度升高而增大，液体的粘度随温度升高而降低。在室温(20℃)和常压下，水的粘度是 $1.005\times10^{-3}Pa\cdot s$，空气的粘度是 $1.813\times10^{-5}Pa\cdot s$。

粘度 μ 和密度 ρ 的比值称为运动粘度，记为 ν，即

$$\nu=\mu/\rho \tag{1.3.5}$$

运动粘度的单位为 m^2/s，$1m^2/s=1\,000cm^2/s$，通常称 cm^2/s 为“斯”。

当流体沿壁面运动时，沿壁面的法线方向，离开壁面的不同流体层具有不同的速度，离壁面愈远的流体层速度愈大。

1.3.4　流体的导热性

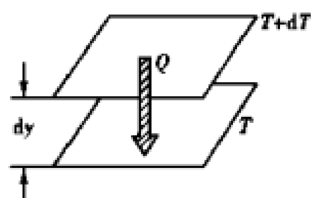


图 1.6　分子热量传递

流体中存在温度差，会发生热量传递。表示流体导热能力的物理量是导热系数。描述导热规律的表达式，与表示分子运动质量传递规律的数学方程式(1.3.1)有类似的形式。

考察温度为 $T+dT$ 平面内的分子与温度为 T 的平行平面内的分子之间的热量传递，如图 1.6 所示。单位时间内所传导的热量为 Q，在热流方向 y 上的温度梯

度为 dT/dy，垂直于热流方向的截面积为 A，流体的分子热传导现象可写成

$$Q = -kA\frac{dT}{dy} \tag{1.3.6}$$

式中 k 为导热系数，负号表示热流方向与温度梯度方向相反。单位时间内通过单位面积所传导的热量称为热流强度，即

$$q = \frac{Q}{A} = -k\frac{dT}{dy} \tag{1.3.7}$$

上式称为傅里叶定律，是表示分子运动热量传递规律的方程式，可以表述为：在存在温度差的两个平行平面内分子之间，热流强度与热流方向 y 上的浓度梯度 dC_A/dy 成正比。

导热系数是温度梯度为 1K/m 时单位时间内通过单位面积的所传导的热量，其定义为

$$k = q/\left(-\frac{dT}{dy}\right) \tag{1.3.8}$$

导热系数表明流体的导热能力，不同的流体导热能力不同。气体的导热系数随温度的升高而增大；大多数液体的导热系数随温度的升高而降低，水和甘油是例外。除了高压和真空外，压力对导热系数的影响不大。

傅里叶定律(1.3.7)式可以用能量梯度来描写，即

$$q = -a\frac{d(\rho cT)}{dy} \tag{1.3.9}$$

式中，c 是流体的比热，$a = k/\rho c$ 是导温系数（或称为热扩散系数），ρcT 是单位体积流体的能量。

传递现象类似

通过介绍流体（主要针对气体而言）扩散系数 D_{AB}、粘度 μ 和导热系数 k 的各自物理意义，可以看到它们的定义式(1.3.2)、(1.3.4)和(1.3.8)的数学形式是相似的。这是因为它们分别是分子微观热运动在质量传递、动量传递和能量（热量）传递的宏观表现。我们还注意到，扩散系数 D_{AB}、运动粘度 ν 和导温系数 k 的单位都是 m^2/s。

无粘性的流体称为理想流体。理想流体忽略了粘性，即忽略了分子运动的动量输运性质。因此，在理想流体中也不考虑分子运动的质量和能量输运性质，即不考虑扩散和热传导，因为它们具有相同的微观机制。

1.4 牛顿流体和非牛顿流体

处于静止的流体由于不能抵抗剪切力，任何微小的剪切力都可以使流体发生任意大的变形，因此流体不能保持一定的形状。当变形速度增大时，流体会表现出抵抗变形的一定能力；运动一旦停止，流体的抵抗力便立即消失。流体受到剪切力作用时抵抗变形的特性称为流体的粘性。

1.4.1　牛顿粘性定律

(1)牛顿平板实验

牛顿(I. Newton)于1687年对流体的剪切运动做了一个简单的平板实验,揭示了流体剪切变形与应力之间的关系。这个著名的实验后人称为牛顿平板实验。下面对牛顿平板实验的原理和方法作扼要的介绍。考察两块很大的平行平板之间的流体流动,如图1.7所示。两块平行平板之间充满流体,板间距离 h 与平板尺度相比很小。设下面一块板静止不动,上面一块板在自身平面内以速度 U 作等速运动。实验表明,接触上、下两块平板的流体都粘附在板上,粘附在上板的流体随上板以速度 U 作等速运动,粘附在下板的流体速度为零,两板间的流体沿 h 方向的流动速度呈线性分布,可表示为

$$u_x(y) = \frac{U}{h}y$$

或用速度梯度 du_x/dy 表示为

$$\frac{U}{h} = \frac{du_x}{dy} \tag{1.4.1}$$

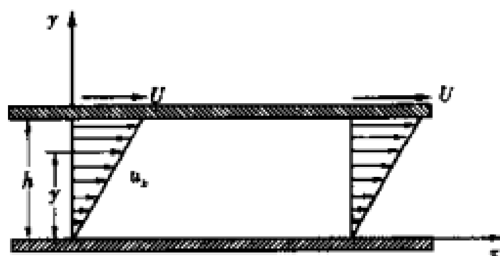


图1.7　牛顿平板试验

流体发生切向变形时,会产生抗拒变形的切向阻力,这就是流体的粘性阻力。粘性阻力总是企图抵消使流体发生切向变形的切向力。单位面积上的切向力称为切应力,用 τ_{yx} 表示。切应力 τ_{yx} 的第一个下标 y 表示切应力作用面的法线与 y 轴方向相同,第二个下标 x 表示切应力方向沿 x 轴方向。

(2)牛顿粘性定律

实验证明,多数流体作直线运动时,相邻流体层之间的切应力 τ_{yx} 与速度梯度 du_x/dy 成正比

$$\tau_{yx} = \mu\frac{du_x}{dy} \tag{1.4.2}$$

式中系数 μ 是动力粘度,简称粘度;速度梯度 du_x/dy 可以理解为剪切变形速率。上式称为牛顿粘性定律。

应该指出,牛顿粘性定律只适用于剪切流动这种最简单的运动形式。牛顿粘性定律是在一定假设下,对作剪切运动的流体推导出来的粘性规律表达式。满足牛顿粘性定律的流体叫做牛顿流体。牛顿粘性定律表达了流体受到的切应力 τ_{yx} 与其发生的剪切变形速率 du_x/dy 之间的线性关系,即描述了运动流体的本构关系,它是牛顿流体的本构方程。

由于流体有粘性,当流体沿壁面运动时,紧靠壁面的一层流体将不作相对于壁面的宏观运动,这种现象称为无滑动现象。沿壁面的法线方向,离开壁面的不同流体层具有不同的速度,离壁面愈远的流体层速度愈大。

1.4.2　粘度

(1)粘度的定义

实验表明,气体和大多数低分子量液体的切应力 τ_{yx} 与速度梯度 du_x/dy 成正比,遵循牛顿粘性定律,这类流体都是牛顿流体。牛顿流体的粘度是流体的物性常数,其定义为

$$\mu = \tau_{yx} / \left(\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}y} \right) \tag{1.4.3}$$

如果流体的密度为 ρ，流体的运动粘度为

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{1.4.4}$$

流体的粘度与温度和压强都有关系。普通的压强对流体的粘度几乎没有什么影响，一般情况下认为流体的粘度只随温度变化。气体和液体在低于 1MPa 的压强作用下，它们的粘度基本上与压强无关。在高压作用下，气体和液体的粘度将随压强的升高而增大。

在室温和常压下，水的粘度比空气的粘度大两个数量级，而水的运动粘度比空气的小一个数量级，这是因为水的密度是空气密度的 1 000 倍。某些气体和液体在常压下的粘度参见表 1.3。

表 1.3　某些气体和液体在常压下的粘度

气体名称	温度/℃	粘度 $\mu\times10^3/(\mathrm{Pa\cdot s})$	液体名称	温度/℃	粘度 $\mu\times10^3/(\mathrm{Pa\cdot s})$
H_2O	100	0.012 7	H_2O	20	1.005 0
Hg	380	0.065 4	Hg	20	1.547 0
CO_2	20	0.014 6	Br_2	26	0.946 0
O_2	20	0.020 3	H_2SO_4	25	19.150
N_2	20	0.017 5	润滑油	20	172.00
空气	20	0.018 1	甘油	20	872.00

(2) 温度对粘度的影响

温度对流体粘度的影响是很大的。液体的粘度随温度上升而减小，气体的粘度随温度上升而增大。液体分子间的吸引力是形成液体粘性的主要因素，当温度升高时液体分子间的空隙增大，分子吸引力减小使液体粘度降低。在温度升高时气体分子热运动变得剧烈起来，加快不同流速流体层的动量交换使气体粘度增大。

水的粘度随温度变化的关系可以用下面的经验公式来近似地表示：

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + 0.033\,7t + 0.000\,221t^2} \tag{1.4.5}$$

式中 μ_0 是水在 0℃ 时的粘度（Pa·s）；t 是水的摄氏温度（℃）。

气体的粘度随温度变化的关系可以近似地用苏士兰（Sutherland）公式表示：

$$\mu = \mu_0 \frac{273 + S}{T + S} \left(\frac{T}{273} \right)^{\frac{3}{2}} \tag{1.4.6}$$

式中 μ_0 是气体在 0℃ 时的粘度（Pa·s）；T 是气体的热力学温度（K）；S 是苏士兰常数，它是随气体种类而确定的常数。（1.4.6）式适用于压强不太高的场合（$p \leqslant 1\mathrm{MPa}$），在相当大的温度范围内（$T < 2\,000\mathrm{K}$）对空气是适用的。常用气体的粘度和苏士兰常数 S 参见表 1.4。表中为便于计算，将水蒸气推算到 0℃。

苏士兰公式比较复杂，实用上多采用如下幂次公式来近似真实气体的粘性关系，即

$$\frac{\mu}{\mu_0}=\left(\frac{T}{T_0}\right)^n,\quad \frac{1}{2}\leqslant n\geqslant 1 \tag{1.4.7}$$

幂次公式(1.4.7)依赖于气体的性质及温度范围。高温 2 000K 以上时幂次 $n\approx 1/2$；低温时幂次 $n\approx 1$。在 $90K<T<300K$ 的温度范围内，对于空气可以采用近似公式

$$\frac{\mu}{\mu_0}=\left(\frac{T}{T_0}\right)^{8/9} \tag{1.4.8}$$

上式与采用苏士兰公式计算的结果误差不超过 5 %。

表 1.4　常用气体的粘度和苏士兰常数 S

流体名称	$\mu_0\times10^6/(\text{Pa}\cdot\text{s})$	$\nu_0\times10^6/(\text{Pa}\cdot\text{s})$	S /K
空气	17.09	13.20	111
氧气	19.20	13.40	125
氮气	16.60	13.30	104
氢气	8.40	93.50	71
一氧化碳	16.80	13.50	100
二氧化碳	13.80	6.98	254
二氧化硫	11.68	3.97	306
水 蒸 气	8.93	11.12	961

1.4.3　非牛顿流体

(1)非牛顿流体的种类

工业上有许多重要流体不遵循牛顿粘性定律，这类流体称为非牛顿流体。对于非牛顿流体切应力 τ_{yx} 与速度梯度 du_x/dy 不再成正比，它们之间的关系可以写成

$$\tau_{yx}=\eta\frac{du_x}{dy} \tag{1.4.9}$$

式中 η 是因流动特性而不同的表观粘度。表观粘度 η 不是非牛顿流体纯粹的物性常数，它是切应力 τ_{yx} 的函数，随切变率 du_x/dy（速度梯度）而变化。这是非牛顿流体与牛顿流体的重要区别。

对于给定的流体，以切应力 τ_{yx} 和切变率 du_x/dy（速度梯度）为坐标作图，如图 1.8 所示。牛顿流体的 τ_{yx} 与 du_x/dy 的关系曲线是通过原点的直线。非牛顿流体的 τ_{yx} 与 du_x/dy 的关系曲线不是通过原点的直线。非牛顿流体的种类很多，图 1.8 中绘出了涨塑性流体、假塑性流体和宾汉流体等非牛顿流体以及牛顿流体的 τ_{yx} 与 du_x/dy 的关系曲线。

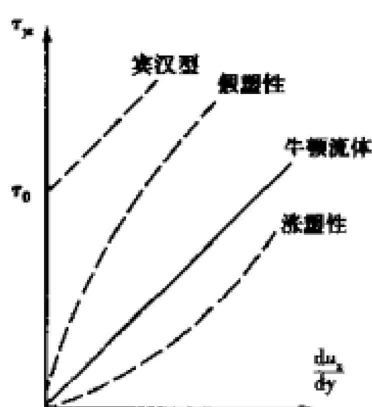


图 1.8　切应力和切变率的关系

(2)幂律流体

对于非牛顿流体的 τ_{yx} 与 du_x/dy 的关系，已有许多经验公式图可以用来表示。在加工聚合物的切变率范围内，通常采用幂指数定律来表明这类流体的表

观粘度 η 与切变率 $\mathrm{d}u_x/\mathrm{d}y$ 的幂指数关系，即

$$\tau_{yx} = m\left|\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}y}\right|^{n-1}\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}y} \tag{1.4.10}$$

由上式表示的表观粘度为

$$\eta = m\left(\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}y}\right)^{n-1} \tag{1.4.11}$$

其中参数 m 称为稠度系数，单位为 $\mathrm{N \cdot s^n/m^2}$；无因次数 n 称为流动行为指数。n 与 1 的偏差代表所关注的流体与牛顿流体流动行为的偏离程度。当 $n=1$ 时，$m=\mu$，由幂指数定律描写的是牛顿流体。当 $n<1$ 时，这类流体称为假塑性流体。多数高分子流体是假塑性流体，其流动行为指数 $n=0.15\sim0.6$。当 $n>1$ 时，这类流体称为膨胀性（涨塑性）流体，如淀粉、硅酸钾和阿拉伯树胶的悬浮液等。对于切变率很大或很小的情形，幂指数定律都不适用。

(3) 粘塑性（宾汉型）流体

有些悬浮液会表现出某种程度的类似固体的性质。这类液体的 τ_{yx} 与 $\mathrm{d}u_x/\mathrm{d}y$ 的关系为

$$\begin{cases}\tau_{yx} = \tau_0, & \dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}y} = 0\\[2ex] \tau_{yx} > \tau_0, & \tau_{yx} = \mu_0\dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}y} \pm \tau_0\end{cases} \tag{1.4.12}$$

式中 τ_0 是临界切应力，也叫屈服应力。当 τ_{yx} 为正时 τ_0 前用正号（+），τ_{yx} 为负时 τ_0 前用负号（−）。遵循(1.4.12)式的流体称为粘塑性流体，也叫宾汉型流体。泥浆、污水和一些颗粒悬浮液属于这类流体。粘塑性流体的流动行为特点是：应力小于 τ_0 时流体不流动；当应力一旦超过 τ_0，其流动行为和牛顿流体的一样。如果悬浮液的颗粒体积浓度为 φ，颗粒直径为 d 以及颗粒所在牛顿流体的粘度 μ_s，(1.4.12)式中的 τ_0 和 μ_0 为

$$\tau_0 = 312.5\frac{\varphi^3}{d^2} \tag{1.4.13}$$

$$\mu_0 = \mu_s\exp\left[\varphi\left(\frac{2}{5} + \frac{14}{\sqrt{d}}\right)\right] \tag{1.4.14}$$

研究非牛顿流体的形变与流动规律的学科，称为流变学。按流变特性区分非牛顿流体，大致可以分为纯粘弹性流体、粘弹性流体和依时性流体。纯粘弹性流体的粘度是切应力的函数。粘弹性流体既具有粘性，又具有弹性；切变率及粘度既和应力有关，也和形变大小有关。依时性流体的流变行为依赖于时间，切变率及粘度既和应力有关，又与承受应力的时间长短有关。依时性流体又分为触变流体和震凝流体。在一定切变率下，切应力随时间减小的依时性流体称为触变流体，如油漆；切应力随时间增大的依时性流体称为震凝流体，如石膏水溶液。

1.5 流体平衡态热力学

流体流动过程中，如果机械能和内能相互转化，既涉及压力 p，也涉及温度 T，要建立封闭的方程组，还需要了解热力学规律（热力学的状态方程、热力学第一定律、热力学第二定律）。如果系统内部不存在任何不平衡位势，包括力的、热的、化学的、电的，则系统处于热力平衡状

态。在一般的热力过程中,没有化学反应,也没有电位梯度,如果系统达到力平衡、热平衡和相位平衡状态,系统便处于热力平衡状态。我们对非平衡状态的热力学了解很少,只能近似应用均匀系统的平衡状态公式。

1.5.1　系统的平衡状态

如果系统建立平衡的速率远大于破坏平衡的速率,这种系统内部的平衡过程称为准静态过程。一个没有能量耗散的准静态过程按正反方向各进行一次,系统和外界都可以恢复到初态,而不留下任何变化的痕迹,这样的过程称为热力学的可逆过程。如果系统虽恢复到初态,但是外界却留下了变化的痕迹,则为不可逆过程。自然界一切自发进行的实际过程都是不可逆过程,可逆过程只是一个理想化的过程。

静止流体是处于平衡状态的均匀系统,而流体流动时则处于非平衡状态和非均匀状态,由于每个流体质点内的流体是近似处于平衡状态的均匀系统,理论和实践表明,对于流体质点应用平衡状态的结论(内能和熵的表达式)是近似准确的。

(1)热力学第一定律

热力学第一定律表明:对于单位质量流体,在过程中传入系统的热量等于系统储存能量的变化与系统所做功之和。热力学第一定律可写成

$$\delta Q = \mathrm{d}E + p\mathrm{d}V \tag{1.5.1}$$

式中,δQ 是传给单位质量流体的总热量;$\mathrm{d}E$ 是单位质量流体内能的增量;$p\mathrm{d}V$ 是流体因体积 V 膨胀对外界压力 p 做功。

(2)热力学第二定律

热力学第二定律表明:机械能在任何情况下都能无条件地全部变成热能,热量不可能自发地从低温物体传向高温物体。

(3)熵

在可逆循环过程中,系统吸收的热量与热源的绝对温度之比的循环积分为零:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

其中,$\frac{\delta Q}{T}$是状态函数 S 的全微分,即

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T} \tag{1.5.2}$$

状态函数 S 称为熵,是判断过程方向的状态函数,其值只与系统所处的状态有关。上式描写了热力学第二定律,是适用于可逆过程的熵的定义式。将(1.5.2)式代人(1.5.1)式,得

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}E + p\mathrm{d}V \tag{1.5.3}$$

热力学第二定律反映过程进行方向的规律,考虑到熵的定义式要适用于不可逆过程,(1.5.2)写为

$$\mathrm{d}S \geqslant \frac{\delta Q}{T} \tag{1.5.4}$$

其中的等号适用于可逆过程,不等号适用于不可逆过程。上式表明,在不可逆循环过程中,系统吸收的热量与热源的绝对温度之比值,总是小于状态函数熵的变化;在可逆循环过程中,系统吸收的热量与热源的绝对温度之比值,等于状态函数熵的变化。

(4)熵增加原理

由热力学第二定律可知,一个孤立系统在实际进行过程中总能量不变,但是熵永远不会减少,即

$$dS \geqslant 0 \tag{1.5.5}$$

上式称为熵增加原理。

1.5.2 比热

单位质量的气体每升高1℃所吸收的能量称为比热,表示为

$$C = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\delta Q}{\Delta T} \tag{1.5.6}$$

(1)等容比热

等容过程中,体积不变时单位质量气体每升高1℃所吸收的能量称为等容比热,以C_V表之,即

$$C_V = \lim_{\Delta T \to 0} \left(\frac{\delta Q}{\Delta T}\right)_V \tag{1.5.7}$$

体积不变时,流体因膨胀对外界做功为零,则

$$\delta Q = \Delta E$$

于是,等容比热可表示为

$$C_V = \lim_{\Delta T \to 0} \left(\frac{\Delta E}{\Delta T}\right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \tag{1.5.8}$$

其中下标$_V$表示求偏导数过程中保持不变的参数即体积V。

(2)等压比热

等压过程中,压力不变时单位质量气体每升高1℃所吸收的能量称为等压比热,以C_p表之,即

$$C_p = \lim_{\Delta T \to 0} \left(\frac{\delta Q}{\Delta T}\right)_p \tag{1.5.9}$$

压力不变时

$$\delta Q = \Delta E + p\Delta V$$

代入(1.5.9)式,得

$$C_p = \lim_{\Delta T \to 0} \left(\frac{\Delta E + p\Delta V}{\Delta T}\right)_p = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{1.5.10}$$

其中下标p表示求偏导数过程中保持不变的参数即压力p。

(3)焓

引进热力学函数焓i

$$i = E + pV \tag{1.5.11}$$

等压比热用焓i表示为

$$C_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p \tag{1.5.12}$$

1.5.3 麦克斯韦(Maxwell)热力学关系式

(1)亥姆霍兹自由能

亥姆霍兹自由能用 F 表示,定义为

$$F = E - TS \tag{1.5.13}$$

(2)吉布斯函数

吉布斯函数用 G 表示,定义为

$$G = i - TS \tag{1.5.14}$$

由(1.5.3)式,可得下面4个对称关系式:

$$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V \tag{1.5.15}$$

$$\mathrm{d}i = \mathrm{d}E + p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p \tag{1.5.16}$$

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}E - T\mathrm{d}S - S\mathrm{d}T = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V \tag{1.5.17}$$

$$\mathrm{d}G = \mathrm{d}i - T\mathrm{d}S - S\mathrm{d}T = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p \tag{1.5.18}$$

(1.5.15)式表明在等容过程中,单位质量传入的热量($\delta Q = T\mathrm{d}S$),等于内能 E 的增量;(1.5.16)式表明在等压过程中,单位质量传入的热量($\delta Q = T\mathrm{d}S$),等于焓的增加;(1.5.17)式表明在等温过程中,体积膨胀对外界所做的功,等于自由能的减少。

(3)麦克斯韦热力学关系式

由(1.5.15)式,对于等熵过程($\mathrm{d}S=0$)有 $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S = -p$,对于等容过程有 $\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V = T$,二式对 S,V 交叉微分后,得

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S \tag{1.5.19}$$

类似地,由(1.5.16),(1.5.17)和(1.5.18)式有

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \tag{1.5.20}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \tag{1.5.21}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \tag{1.5.22}$$

(1.5.19),(1.5.20),(1.5.21)和(1.5.22)式是4个麦克斯韦热力学关系式。

1.5.4 内能和熵的表达式

均匀系统的热力学性质由压力 $p=p(T,V)$,内能 $E=E(T,V)$,熵 $S=S(T,V)$ 三个热力学函数完全确定,其中 T、V 是独立变数。如果已知 $p(T,V)$ 和等容比热 $C_V(T,V)$,那么确定热力学性质的内能 $E=E(T,V)$ 和熵 $S=S(T,V)$,可以由 $p(T,V)$ 和 $C_V(T,V)$ 表达出来。

(1)内能的表达式

根据(1.5.3),(1.5.8)和(1.5.19)式,有

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = C_V \tag{1.5.23}$$

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_T = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_T + p = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \tag{1.5.24}$$

(1.5.23)和(1.5.24)式代入单位质量内能的微分表达式,有

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T dV = C_V dT + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\right]dV \tag{1.5.25}$$

从上式可知,在等容过程中 $dE_V = C_V dT_V$,在等温过程中 $dE_T = \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\right]NdV_T$。积分(1.5.25)式,得到内能的表达式:

$$E(T,V) = \int_{T_0,V_0}^{T,V}\left\{C_V dT + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\right]dV\right\} \tag{1.5.26}$$

(2)熵的表达式

将(1.5.23)和(1.5.24)式代入熵的微分表达式,有

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV = \frac{C_V}{T}dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV \tag{1.5.27}$$

积分(1.5.27)式,得到熵的表达式:

$$S(T,V) = \int_{T_0,V_0}^{T,V}\left[\frac{C_V}{T}dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV\right] \tag{1.5.28}$$

(3)等压比热

已知 $C_V(T, V)$,$p(T, V)$和 $V(T, p)$,可以求得等压比热。dS 和 dV 的微分表达式为

$$dS(T,p) = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp, \quad dV(T,p) = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp$$

将以上二式代入(1.5.27)式,得

$$T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dp\right] = C_V dT + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left[\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp\right]$$

上式用于定压过程,$dp=0$,消去各项中的 dT,并注意到

$$\left(\frac{\partial i}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p = T, \quad C_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$$

于是得

$$C_p = C_V + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{1.5.29}$$

(4)等容比热

等容比热 $C_V(T, V)$可以由状态方程求出,即

$$C_= C_{V_0} + T\int_{V_0}^{V}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V dV \tag{1.5.30}$$

上式表明,只要在某一体积 V_0测得相应的等容比热 C_{V0},则对于任何体积 V,可以由状态方程 $p=p(T, V)$给出(1.5.30)式中的被积函数来求得等容比热 C_V。

(5)完全气体情形

从完全气体的状态方程 $pV=RT$,可以推出

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V}, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V = 0 \tag{1.5.31}$$

将(1.5.31)式代入(1.5.29)式,得到完全气体情况下等压比热的表达式

$$C_p = C_V + \frac{RT}{V}\frac{R}{p} = C_V + R \tag{1.5.32}$$

将(1.5.31)式代入(1.5.26)式,得到完全气体情况下的内能表达式

$$E = \int C_V \mathrm{d}T + \int\left(\frac{RT}{V} - p\right)\mathrm{d}V = \int C_V \mathrm{d}T \tag{1.5.33}$$

和熵的表达式

$$S = \int \frac{C_V}{T}\mathrm{d}T + \int \frac{R}{V}\mathrm{d}V = \int C_V \mathrm{d}\ln T + R\ln V = \int C_V \mathrm{d}\ln T + (C_p - C_V)\ln V \tag{1.5.34}$$

将(1.5.35)式代入(1.5.15)式,并由(1.5.16)式得到完全气体情况下焓的表达式

$$i = \int C_V \mathrm{d}T + pV = \int C_p \mathrm{d}T \tag{1.5.35}$$

焦耳实验指出,完全气体情况下等容比热 C_V 只与温度 T 有关,而与体积 V 无关,即

$$C_V = C_V(T) \tag{1.5.36}$$

对于大气,只要温度不太高,等压比热 C_p 和等容比热 C_V 近似为常数。这种情况下,(1.5.32),(1.5.33)和(1.5.35)式变为

$$C_p - C_V = R \tag{1.5.37}$$

$$U = C_V T \tag{1.5.38}$$

$$i = C_p T \tag{1.5.39}$$

而(1.5.34)式变为

$$\begin{aligned} S &= C_V\ln T + (C_p - C_V)\ln V = C_V \ln T + C_V\left(\frac{C_p}{C_V} - 1\right)\ln = \\ &C_V \ln TV^{\gamma-1} + 常数 = C_V \ln\frac{p}{\rho^\gamma} + 常数 \end{aligned} \tag{1.5.40}$$

其中 $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ 叫做绝热常数;单位质量的体积 V 与密度 ρ 的乘积等于 1,则 $1/\rho^\gamma = V^\gamma$。(1.5.40)式中最后一个等式的常数内包含了 $\ln(1/R)$。

(6)液体情形

由于液体的可压缩性很小,一般认为液体的密度和体积是不随压力和温度改变的常数。于是,对于液体等压比热和等容比热是同一数值,即

$$C_p = C_V = C$$

由于液体体积不变,压力做功为零,其内能的增量等于传给液体的热量,可表示为

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}E = \delta Q = C\mathrm{d}T$$

(7)斜压流体和正压流体

流体质点在运动过程中,其密度只是压力的函数,与其他热力学变数无关,这类流体称为正压流体,否则称为斜压流体。

不可压缩流体可表示为 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0$,其密度是常数,因此不可压缩流体是正压流体。绝热(等熵)的完全气体也是正压流体,因为根据(1.5.40)式下式成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0 \tag{1.5.41}$$

习　　题

1.1　流体在什么情况下可以采用连续介质假定？

1.2　在流体的连续介质假定下，流体质点的尺度应满足什么条件？试举例说明。

1.3　人造卫星飞离大气层进入高空稀薄气体层时，如果稀薄气体分子自由程的数量级只有几米，问这种情况下连续介质假设是否成立？

1.4　大气层的空气密度随着离开地面的高度增加而减小，可否从大气密度随高度变化这一事实认定大气是可压缩的。

1.5　流体静止时有没有切应力？理想流体在运动时有没有切应力？粘性流体静止时有没有粘性？

1.6　设体积为 5.6m^3的油重 46 800N，试计算这种油料的密度和相对密度。（答案：$\rho = 852kg/m^3$，$d = 0.852$）

1.7　在压力容器中受到压缩的水，当压强增加 1MPa 时，体积为 1 000cm^3；当压强增加至5MPa 时，体积为 998cm^3。求水的体积模量。（答案：$K = 2GPa$）

1.8　已知水平烟道中各烟气组分的百分数分别为：CO_2的 $\alpha_1 = 13.6\%$，SO_2的 $\alpha_2 = 0.4\%$，O_2的 $\alpha_3 = 4.2\%$，N_2的 $\alpha_4 = 75.6\%$，H_2O 的 $\alpha_5 = 6.2\%$，试求烟气的密度。（答案：$\rho = 1.336kg/m^3$）

1.9　直径为 50mm 的肥皂泡，内外压差为 19.62N/m^2，试求膜的表面张力。（答案：$\sigma = 0.25N/m$）

1.10　轴在轴承中空载旋转，轴和轴瓦同心，如图所示。已知轴的直径 $D = 0.05m$，轴瓦长 $l = 0.076m$，径向间隙 $c = 0.5 \times 10^{-4}m$。如果轴的转速为 $\omega = 200rad/s$，测得摩擦力矩 $M = 1.2N \cdot m$，轴和轴瓦之间的流体速度按线性分布，试求流体的粘度。（答案：$\mu = 4.02 \times 10^{-4}Pa \cdot s$）

1.11　设流体流过平板的速度为 $u_x = \frac{3}{4}y - y^2$，流体的动力粘度 $\mu = 8.3 \times 10^{-4}N \cdot s/m^2$，试求 $y = 0.15m$ 处的切应力。（答案：$\tau = 3.72 \times 10^{-4}N/m^2$）

1.12　一平板距离另一固定平板 0.5mm，两板间充满流体，上板在 2N/m^2的力作用下以 0.25m/s 的速度移动，求板间流体的粘度。（答案：$\mu = 4 \times 10^{-3}Pa \cdot s$）

1.13　设空气在 0℃时的运动粘度 $\nu_0 = 13.2 \times 10^{-6}m^2/s$，密度 $\rho_0 = 1.29kg/m^3$。试求空气在 150℃时的动力粘度。（答案：$\mu = 23.62 \times 10^{-6}Pa \cdot s$）

1.14　重 500N 的飞轮回转半径为 30cm，由于轴套间流体粘性的影响，当飞轮以 600r/min 旋转时，其角减速度为 0.02rad/s^2。已知轴套的长度为 5cm，轴的直径为 2cm，轴套与轴之间的间隙为 0.05mm。试求流体的粘度。（答案：$\mu = 1.458Pa \cdot s$）

1.15　某液体具有粘度 $\mu = 0.005N \cdot s/m^2$，比重为 0.85，求其运动粘度。（答案：$\nu = 5.88 \times 10^{-6}m^2/s$）

第 2 章
流场及其张量表示法

2.1　流场和标量函数的梯度

流体力学研究的是场，通常考察定义在空间点上的流体量随时间的变化规律。密度场、压力场、势力场、速度场、涡旋场和温度场等是流体力学中主要关注的流场。因此场论知识是学习流体力学必不可少的数学工具。

2.1.1　流场的定义及分类

(1)流场的定义

设在空间中某个区域内定义标量函数或矢量函数，则称定义在此空间区域内的函数为场。流体流动空间中某个区域内，定义表征流体量的标量函数或矢量函数，则统称定义在此空间区域内的这些函数为流场。

在连续介质假定下，流场空间由大量连续分布的流体质点所充满，每一时刻流体质点占据的流场空间点上都有确定的物理意义。

(2)流场的分类

如果在流场中所定义的是标量函数，如温度、密度、压力等，则分别称为温度场、密度场、压力场，它们是标量场。设 $\boldsymbol{r}$ 是流场空间中点的矢径，t 是时间参数，则用标量函数 φ 描述的标量场可表示为

$$\varphi = \varphi(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.1.1}$$

对于在流场中所定义的矢量函数，如有势力、速度、旋度等，则分别称为有势力场、速度场、旋度场，它们是矢量场。用矢量函数 $\boldsymbol{a}$ 描述的矢量场可表示为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.1.2}$$

如果同一时刻流场内各点函数的值都相等，则称为均匀流场，反之，称为不均匀流场。如果流场内函数值不依赖于时间，即不随时间改变，则称为定常流场（稳定场），反之，称为不定常流场（不稳定场）。

2.1.2 流场的几何表示

(1)标量场的几何表示

等位面是标量场的几何表示。对于标量场 $\varphi(\boldsymbol{r},t)$,在任一固定时刻 t_0,令

$$\varphi(\boldsymbol{r},t_0)=\varphi_0 \tag{2.1.3}$$

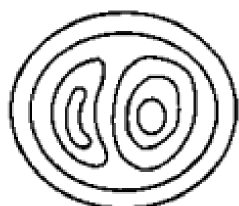


图 2.1 标量场等位面

式中 φ_0 是常数。标量场 $\varphi(\boldsymbol{r},t)$ 中与 φ_0 对应的曲面称为等位面。取一系列不同的 φ_0 值,将在标量场中得到一簇等位面,如图 2.1 所示。在同一等位面上,φ 值都相等。一簇等位面的疏密程度反映了标量场的函数变化。标量函数 φ 值的改变仅在等位面的法线方向发生。沿等位面的切线方向,标量函数 φ 的值不发生变化。在用等位面几何表示标量场时,等位面之间相距越近表示标量函数 φ 变化越剧烈,反之,变化越缓慢。

(2)矢量场的几何表示

矢量线是矢量场的几何表示。对于矢量场 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},t)$,矢量 $\boldsymbol{a}$ 的大小是标量,可以用等位面来几何地表示矢量的大小。至于矢量的方向,则要采用矢量线来几何表示。可以定义矢量场中这样一条曲线是矢量线,即矢量线上每一点的切线方向与同一点的矢量方向重合,如图 2.2 所示。



图 2.2 矢量线

设 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是矢量线的切向元素,根据矢量线的定义可得矢量线微分方程

$$\boldsymbol{a}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0 \tag{2.1.4}$$

矢量线微分方程(2.1.4)在直角坐标系中的形式为

$$\frac{\mathrm{d}x}{a_x(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}y}{a_y(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}z}{a_z(x,y,z)} \tag{2.1.5}$$

其中,a_x,a_y,a_z 分别是矢量 $\boldsymbol{a}$ 的直角坐标分量。

在矢量场中任取一非矢量线的封闭曲线,通过该封闭曲线上每一点作矢量线,由这些矢量线包围的管形区域称为矢量管。矢量线的疏密程度反映矢量的大小,线上每一点的切线方向代表矢量的方向。因此,采用矢量线就可以对矢量场进行完全的几何描述。

2.1.3 标量函数的梯度

(1)梯度

在标量场 $\varphi(\boldsymbol{r},t)$ 的等位面 $\varphi=C$ 法线方向 $\boldsymbol{n}$ 上,大小为$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$,方向为 $\boldsymbol{n}$ 的矢量,称为标量函数 φ 的梯度,表示为

$$\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{n} \tag{2.1.6}$$

梯度 $\mathrm{grad}\varphi$ 的方向与等位面的法线 $\boldsymbol{n}$ 重合,且指向函数 φ 增长的方向,大小为 $\boldsymbol{n}$ 方向上的方向导数$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$。

事实上，只要知道标量场中一点处等位面法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，所有其他方向 s 的方向导数都可以通过方向导数$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$和方向余弦 $\cos(n, s)$ 表示出来，即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos(n,s) \tag{2.1.7}$$

上式可以改写为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = s_0 \cdot \mathrm{grad}\varphi \tag{2.1.8}$$

式中 s_0是 s 方向的单位矢量。(2.1.8)表明，梯度矢量 $\mathrm{grad}\varphi$ 在任一方向 s 上的投影等于该方向的方向导数。梯度 $\mathrm{grad}\varphi$ 的方向，即等位面的法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向是函数 φ 变化最快的方向。梯度是标量场不均匀性的量度，它完全描写了标量场 $\varphi(\boldsymbol{r},t)$ 中一点邻域内函数 φ 的变化情况。

(2)梯度在直角坐标系中的表达式

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{2.1.9}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别是 x 轴、y 轴、z 轴的单位矢量。

梯度 $\mathrm{grad}\varphi$ 满足关系式

$$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{grad}\varphi \tag{2.1.10}$$

反之，若

$$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a}$$

则 $\boldsymbol{a}$ 必为梯度 $\mathrm{grad}\varphi$。

若 $\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}\varphi$，且 φ 是矢径 $\boldsymbol{r}$ 的单值函数，则沿任一封闭曲线 L 的线积分 $\int_L \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 等于零；反之，若矢量 $\boldsymbol{a}$ 沿任一封闭曲线 L 的线积分等于零，则矢量 $\boldsymbol{a}$ 必为某一标量函数 φ 的梯度。

矢量场 $\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}\varphi$ 称为梯度场，通常叫做位势场，标量函数 φ 称为位势函数。

2.1.4　哈密顿(Hamilton)算子

为了场论中矢量分析计算的方便，引入一个矢性微分算子

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.1.11}$$

叫做哈密顿算子。哈密顿算子∇是矢量分析中一个重要的微分算子，它是具有矢量和微分双重性质的符号。在运算时，哈密顿算子∇和矢量一样参与矢量分析，遵循矢量代数中的所有法则；也作为微分运算子按微分法则进行运算。哈密顿算子∇只对位于算子∇右边的量发生作用，对位于算子∇左边的量不发生作用。

流体力学中，常常要运用下面哈密顿算子的运算规则：

$$\nabla\varphi = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{2.1.12}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{2.1.13}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \qquad (2.1.14)$$

$$\Delta\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) =$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \qquad (2.1.15)$$

$$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} = ((u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k}) \cdot (\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}))(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) =$$

$$\left(u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y} + u_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) =$$

$$\left(u_x\frac{\partial a_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial a_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(u_x\frac{\partial a_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial a_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{j} +$$

$$\left(u_x\frac{\partial a_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial a_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{k} \qquad (2.1.16)$$

2.1.5 基本运算公式

梯度运算基本公式：

1) $\mathrm{grad}(\varphi + \psi) = \mathrm{grad}\varphi + \mathrm{grad}\psi$

2) $\mathrm{grad}(\varphi\psi) = \varphi\,\mathrm{grad}\psi + \psi\,\mathrm{grad}\varphi$

3) $\mathrm{grad}F(\varphi) = F'(\varphi)\,\mathrm{grad}\varphi$

4) $\mathrm{grad}\varphi(\boldsymbol{r}) = \varphi'(\boldsymbol{r})\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$

5)格林第一公式

$$\int_V (\varphi\Delta\psi + \mathrm{grad}\varphi \cdot \mathrm{grad}\psi)\,\mathrm{d}V = \int_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}S$$

$$\int_V (\psi\Delta\varphi + \mathrm{grad}\psi \cdot \mathrm{grad}\varphi)\,\mathrm{d}V = \int_S \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S$$

6)格林第二公式

$$\int_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\,\mathrm{d}V = \int_S \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

7) $\int_V (\mathrm{grad}\varphi)^2\mathrm{d}V = \int_S \varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S, (\Delta\varphi = 0)$

8) $\int_V \nabla\varphi\,\mathrm{d}S = \int_S \boldsymbol{n}\varphi\,\mathrm{d}S$

9) $\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}S$

10) $\int_V \nabla \times \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}S$

11) $\int_V (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V = \int_S (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}S$，$\boldsymbol{u}$ 是常量。

12) $\int_V \Delta\varphi \mathrm{d}V = \int_V \nabla \cdot \nabla\varphi \mathrm{d}V = \int_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S = \int_S (\boldsymbol{n} \cdot \nabla\varphi)\mathrm{d}S$

13) $\int_V \Delta\boldsymbol{a}\mathrm{d}V = \int_V (\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{a}\mathrm{d}V = \int_S \frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial n}\mathrm{d}S = \int_S (\boldsymbol{n} \cdot \nabla)\boldsymbol{a}\mathrm{d}S$

基本公式 8) ~ 13)，可推广为下列普遍公式。设函数 $L(A)$ 和 $L(B)$ 满足

$$L(A+B) = L(A) + L(B),\ L(\lambda A) = \lambda L(A)$$

则推广的奥高公式为

$$\int_V L(\nabla)\mathrm{d}V = \int_S L(\boldsymbol{n})\mathrm{d}S \tag{2.1.17}$$

其中，在 $L(\nabla)$ 中，哈密顿算子 ∇ 前面的量是常数。

2.2　矢量函数的散度和旋度

在流体力学中讨论流体不可压缩性的时候，要涉及到速度矢量的散度；在研究流体的有旋运动时，速度的旋度即涡量是描述涡旋性质的基本流体量。除了速度的散度和旋度外，流体力学中其他矢量函数的散度和旋度也有重要的应用。

在介绍矢量函数的散度和旋度之前，需要明确有关曲线和曲面的术语。把具有连续转动切线的曲线，称为光滑曲线；具有连续转动法线的曲面，称为光滑曲面。由有限多段不相交的光滑曲线连成的曲线，叫做简单曲线；由有限多块不相交的光滑曲面连成的曲面，叫做简单曲面。为了区分曲面的两侧，常常取定其中的一侧作为曲面的正侧，并规定曲面的法线矢量 $\boldsymbol{n}$ 是指向正侧的；如果曲面是封闭的，则通常总是取其外侧为正侧。这种取定了正侧的曲面，称为有向曲面。

2.2.1　矢量函数的散度

(1) 矢量函数的通量

在给定矢量场 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},t)$ 内取一曲面 S，在其上的面积元素 $\mathrm{d}S$ 内任取一点 M，过 M 点作曲面 S 的法线。如果曲面不封闭，约定法线的正方向；如果曲面是封闭的，通常取外法线为正方向。令 $\boldsymbol{n}$ 代表曲面 S 上法线方向的单位矢量，矢量 $\boldsymbol{a}$ 是 M 点的函数，如图 2.3 所示。

矢量 $\boldsymbol{a}$ 在法线方向 $\boldsymbol{n}$ 上的投影为

$$a_n = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} = a_x\cos(n,x) + a_y\cos(n,y) + a_z\cos(n,z) \tag{2.2.1}$$

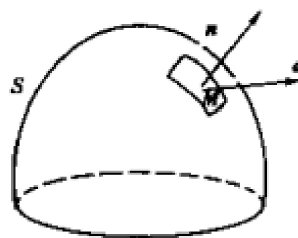


图 2.3　矢量通过曲面的通量

定义 $a_n\mathrm{d}S$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 向正侧穿过面积元素 $\mathrm{d}S$ 的通量，积分

$$\int_S a_n \mathrm{d}S$$

称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 通过曲面 S 的通量。

有向曲面 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 是指大小为 $\mathrm{d}S$，方向为法线正方向的面积矢量，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}S\,\boldsymbol{n}$$

面积矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 在直角坐标轴上的投影分量为

$$dS\cos(n,x) = dydz, dS\cos(n,y) = dzdx, dS\cos(n,z) = dxdy$$

于是，矢量 $\boldsymbol{a}$ 通过曲面 S 的通量可以写为

$$\int_S a_n dS = \int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\int_S [a_x\cos(n,x) + a_y\cos(n,y) + a_z\cos(n,z)]dS = \tag{2.2.2}$$

$$\int_S (a_x dydz + a_y dzdx + a_z dxdy)$$

当曲面 S 是封闭曲面时，矢量 $\boldsymbol{a}$ 通过曲面 S 的通量表示为

$$\Phi = \oint_S a_n dS \tag{2.2.3}$$

下面用速度场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ 来说明矢量通量的物理意义。单位时间内向正侧穿过曲面元素 dS 的流量为

$$dQ = \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{S}$$

如果 S 是封闭曲面，在单位时间内流体向正侧穿过曲面 S 的正流量与负流量的代数和为

$$Q = \oint_S \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{S}$$

上式表明，当流量 $Q=0$ 时，流出等于流入；如果流量 $Q>0$，流出多于流入，此时曲面 S 内必有产生流体的源泉；如果流量 $Q<0$，流出少于流入，此时曲面 S 内必有排泄流体的漏洞。

(2)矢量函数的散度

在矢量场 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},t)$ 内任取一点 M，包围 M 点的体积为 ΔV。若体积 ΔV 的界面为 S，作矢量 $\boldsymbol{a}$ 通过 S 面的通量，除以体积 ΔV。令体积 ΔV 向 M 点无限收缩，得极限

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\int_S a_n dS}{\Delta V}$$

设此极限存在。定义上面的极限值为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的散度，以 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}$ 表示，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\int_S a_n dS}{\Delta V} \tag{2.2.4}$$

散度是一个不依赖于坐标系选取的数量，它组成一个标量场。散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}=0$ 的矢量场称为无源场或管式场。

(3)散度在直角坐标系中的表达式

设矢量函数 $\boldsymbol{a}$ 的三个分量 a_x, a_y, a_z 具有连续一阶偏导数，利用奥高定理可以将(2.2.3)式写成

$$\oint_S a_n dS = \oint_S [a_x\cos(n,x) + a_y\cos(n,y) + a_z\cos(n,z)]dS =$$

$$\int_{\Delta V}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dV \tag{2.2.5}$$

式中体积分的被积函数是连续的，根据中值公式，(2.2.5)式可以改写为

$$\oint_S a_n dS = \Delta V\cdot\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)_Q \tag{2.2.6}$$

下标 Q 表示函数在体积 ΔV 中一点 Q 取值。将上式代入(2.2.4)式，得

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S a_n \mathrm{d}S}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right)_Q \tag{2.2.7}$$

当 ΔV 向 M 点收缩时，Q 点最后与 M 点重合。因为 a_x, a_y, a_z 具有连续一阶偏导数，即得

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \nabla \cdot \boldsymbol{a} \tag{2.2.8}$$

上式也写成了用哈密顿算子表达的形式。

(4) **奥高公式**

将(2.2.8)式代入(2.2.5)式，并将 ΔV 改写为 V，便得到不依赖于坐标系选择的奥高公式，即

$$\int_S a_n \mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{a}\mathrm{d}V \tag{2.2.9}$$

或将上式写为

$$\int_S \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a}\mathrm{d}S = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{a}\mathrm{d}V \tag{2.2.10}$$

(5) **无源场及其性质**

如果矢量 $\boldsymbol{a}$ 的散度为零，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = 0 \tag{2.2.11}$$

则称矢量场 $\boldsymbol{a}$ 为无源场。

无源场的主要性质可以表述为：

无源矢量 $\boldsymbol{a}$ 通过矢量管任一横截面上的通量保持同一数值；矢量管不能在无源场中终止发生；矢量 $\boldsymbol{a}$ 通过张于一周线上所有曲面的通量均相同。

2.2.2　矢量函数的旋度

(1) **环量**

在矢量场 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},t)$ 内任取一曲线 L，作线积分

$$\int_L \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_L (a_x \mathrm{d}x + a_y \mathrm{d}y + a_z \mathrm{d}z) \tag{2.2.12}$$

上式称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 沿曲线 L 的环量。若 L 是一封闭曲线，则 $\oint_L \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 沿封闭曲线 L 的环量。

(2) **旋度矢量在 $\boldsymbol{n}$ 方向的投影**

设 M 是矢量场 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},t)$ 内一点。围绕 M 点取无限小封闭曲线 L，$\boldsymbol{n}$ 是张于周线 L 上曲面 S 的法线矢量，法线的正方向在右手坐标系中与 L 的正方向形成右手螺旋系统，如图 2.4 所示。作矢量 $\boldsymbol{a}$ 沿曲线 L 的环量，并除以曲面面积 S。令封闭曲线 L 逐渐收缩于 M 点，张于周线 L 上曲面 S 的面积趋于零，曲面 S 的法线矢量 $\boldsymbol{n}$ 也趋于某一固定方向，于是得到下面的极限

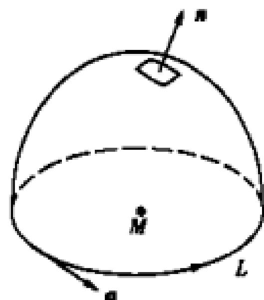


图 2.4　矢量沿曲线的环量

$$\mathrm{rot}_n \boldsymbol{a} = \lim_{S \to 0} \frac{\oint_L \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}}{S} \tag{2.2.13}$$

式中矢量 $\mathrm{rot}_n\boldsymbol{a}$ 称为旋度矢量 $\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向的投影。

(3)旋度矢量在直角坐标系中的表达式

$$\begin{cases} \mathrm{rot}_x\boldsymbol{a} = \dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z} \\ \mathrm{rot}_y\boldsymbol{a} = \dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x} \\ \mathrm{rot}_z\boldsymbol{a} = \dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y} \end{cases} \tag{2.2.14}$$

或

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \tag{2.2.15}$$

(4)斯托克斯定理

$$\int_L \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \mathrm{rot}_n\boldsymbol{a}\mathrm{d}S = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.2.16}$$

(5)无旋场及其性质

旋度矢量 $\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=0$ 的矢量场称为无旋场。

无旋场和位势场等价，即若矢量 $\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}\varphi$ 是位势场，则 $\boldsymbol{a}$ 也是无旋场，必然有

$$\mathrm{rotgrad}\varphi = 0 \tag{2.2.17}$$

反之，若矢量 $\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 是无旋场，则 $\boldsymbol{a}$ 必为位势场。

2.2.3 基本运算公式

(1)散度基本运算公式：

1) $\mathrm{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{div}\boldsymbol{a}+\mathrm{div}\boldsymbol{b}$

2) $\mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi\mathrm{div}\boldsymbol{a}+\mathrm{grad}\varphi\cdot\boldsymbol{a}$

3) $\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{b}$

4) $\mathrm{divgrad}\varphi=\Delta\varphi$

5) $\mathrm{divrot}\boldsymbol{a}=0$

6) $\mathrm{div}(\varphi\mathrm{grad}\psi)=\varphi\Delta\psi+\mathrm{grad}\varphi\cdot\mathrm{grad}\psi$

7) $(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}\dfrac{a^2}{2}-\boldsymbol{a}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$

(2)旋度基本运算公式：

8) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{rot}\boldsymbol{a}+\mathrm{rot}\boldsymbol{b}$

9) $\mathrm{rot}(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi\mathrm{rot}\boldsymbol{a}+\mathrm{grad}\varphi\times\boldsymbol{a}$

10) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\mathrm{div}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\mathrm{div}\boldsymbol{a}$

11) $\mathrm{rotgrad}\varphi=0$

12) $\mathrm{rotrot}\boldsymbol{a}=\mathrm{graddiv}\boldsymbol{a}-\Delta\boldsymbol{a}$

2.3　张量表示法

流体力学中出现的应力和应变等重要物理量本身是张量，应用张量知识进行探讨是十分必要的。张量表示法具有书写简洁、运算方便的优点，特别是当表达流体力学基本规律的方程中同时出现张量和矢量时，张量表示法更加显示其优越性。张量表示法可以使用基本运算公式使用的所有代数运算法则和微积分运算法则。在近代理论流体力学和计算流体力学中越来越广泛地使用张量表示法。

笛卡尔直角坐标系中定义的张量称为笛卡尔张量，在任意曲线坐标系中定义的张量称为普遍张量。流体力学中仅限于用笛卡尔张量表示流场。流体力学中一般同时采用张量和哈密顿算子表示法。

2.3.1　张量表示法

(1)矢量的张量表示法

任选一个符号 a，下标为 i，若 i 可取 1,2,3，则 a_i 表示一个矢量，下标 i 称为自由指标。例如，若将坐标改写为 x_1,x_2,x_3，矢径 $\boldsymbol{r}$ 和梯度矢量 $\mathrm{grad}\varphi$ 可用张量分别表示为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x_1 + \boldsymbol{j}x_2 + \boldsymbol{k}x_3 = x_i \tag{2.3.1}$$

$$\mathrm{grad}\varphi = \boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \tag{2.3.2}$$

(2)约定求和法则

约定在同一项中如有两个自由指标相同时，就表示要对这个指标从 1 到 3 求和，例如

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_ib_i = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{2.3.3}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \tag{2.3.4}$$

$$\Delta\boldsymbol{a} = \nabla^2\boldsymbol{a} = \nabla\cdot\nabla\boldsymbol{a} = \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_i\partial x_i} \tag{2.3.5}$$

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} = u_i\frac{\partial a_j}{\partial x_i} \tag{2.3.6}$$

(3)克罗内克尔记号(Kroneker) δ_{ij}

$$\delta_{ij} = \begin{cases}0, & 当\ i \neq j\ 时\\ 1, & 当\ i = j\ 时\end{cases} \tag{2.3.7}$$

例如两正交坐标轴单位矢量的点积可表示为

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{2.3.8}$$

(4)置换符号 ε_{ijk}

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases}0, & i,j,k\ 中有两个以上指标相同时\\ 1, & i,j,k\ 为偶排列(如\ \varepsilon_{123},\varepsilon_{231},\varepsilon_{312}\ 等)\\ -1, & i,j,k\ 为奇排列(如\ \varepsilon_{213},\varepsilon_{321},\varepsilon_{132}\ 等)\end{cases} \tag{2.3.9}$$

例如

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\varepsilon_{ijk}a_jb_k \tag{2.3.10}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3} \tag{2.3.11}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j} \tag{2.3.12}$$

ε-δ 恒等式

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ist}=\delta_{js}\delta_{kt}-\delta_{jt}\delta_{ks} \tag{2.3.13}$$

2.3.2 张量的定义

(1)坐标变换

标量和矢量是以坐标变换为基础的定义。设旧坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 的单位矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，新坐标系 $Ox'_1x'_2x'_3$ 的单位矢量为 $\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3$。单位矢量的正交关系为

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}'_i\cdot\boldsymbol{e}'_j=\delta_{ij} \tag{2.3.14}$$

新旧单位矢量之间存在下面的关系

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}'_1=\alpha_{11}\boldsymbol{e}_1+\alpha_{12}\boldsymbol{e}_2+\alpha_{13}\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}'_2=\alpha_{21}\boldsymbol{e}_1+\alpha_{22}\boldsymbol{e}_2+\alpha_{23}\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}'_3=\alpha_{31}\boldsymbol{e}_1+\alpha_{32}\boldsymbol{e}_2+\alpha_{33}\boldsymbol{e}_3\end{cases} \tag{2.3.15}$$

其中 $\alpha_{ij}=\boldsymbol{e}'_i\cdot\boldsymbol{e}_j(i,j=1,2,3)$ 是新旧坐标系中不同坐标轴之间的方向余弦。(2.3.15)式可用张量表示为

$$\boldsymbol{e}'_i=\alpha_{ij}\boldsymbol{e}_j,\quad \boldsymbol{e}_i=\alpha_{ji}\boldsymbol{e}'_j \tag{2.3.16}$$

由(2.3.14)式和(2.3.16)式，得

$$\alpha_{ij}\alpha_{ik}=\delta_{ij} \tag{2.3.17}$$

$$\alpha_{ji}\alpha_{ki}=\delta_{jk} \tag{2.3.18}$$

(2)标量的定义

设标量 φ 的数值在旧坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 中表示为 $\varphi(x_1,x_2,x_3)$，在新坐标系 $Ox'_1x'_2x'_3$ 中表示为 $\varphi(x'_1,x'_2,x'_3)$。标量 φ 的数值在坐标变换时保持其值不变，于是

$$\varphi(x'_1,x'_2,x'_3)=\varphi(x_1,x_2,x_3) \tag{2.3.19}$$

(2.3.19)式给出了标量的定义，即在选定的测量单位下，只需要用一个不依赖于坐标系的数值表征其性质的量称为标量。

(3)矢量的定义

以 $\boldsymbol{a}$ 表示矢量，矢量 $\boldsymbol{a}$ 在旧坐标轴上的投影为 a_1,a_2,a_3，在新坐标轴上的投影为 a'_1,a'_2,a'_3。新旧坐标轴上两个投影之间存在下面的关系

$$\begin{aligned}a'_1&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}'_1=\alpha_{11}a_1+\alpha_{12}a_2+\alpha_{13}a_3\\ a'_2&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}'_2=\alpha_{21}a_1+\alpha_{22}a_2+\alpha_{23}a_3\\ a'_3&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}'_3=\alpha_{31}a_1+\alpha_{32}a_2+\alpha_{33}a_3\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

或

$$a'_i = \alpha_{ij} a_j (a_i = \alpha_{ji} a'_j) \tag{2.3.21}$$

(2.3.21)式给出了矢量的定义，即对每一个直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 有三个量 a_1, a_2, a_3，它们依据(2.3.20)式变换为另一个直角坐标系 $Ox'_1x'_2{'}x_3$ 的三个量 a'_1, a'_2, a'_3，则由三个量 a_1, a_2, a_3 定义的量 $\boldsymbol{a}$ 称为矢量。在选定的测量单位下，矢量 $\boldsymbol{a}$ 只需要用一个不依赖于坐标系的数字及方向表征其性质。

(4)二阶笛卡尔张量

类似矢量定义可以定义二阶笛卡尔张量。若对每一个直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 有九个量 p_{lm}，它们依据下式

$$p'_{ij} = \alpha_{il}\alpha_{jm}p_{lm} \tag{2.3.22}$$

变换为另一个直角坐标系 $Ox'_1x'_2x'_3$ 的九个量 p'_{ij}，则该九个量 p_{lm} 定义的一个量 P 称为二阶笛卡尔张量，简称二阶张量。二阶张量通常用表示为

$$P = \{p_{ij}\} = p_{ij} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \tag{2.3.23}$$

其中 p_{ij} 称为二阶张量 P 的分量。

(5) n 阶张量

设在每一个直角坐标系内给出 3^n 个数，当坐标变换时，这些数按下式

$$p'_{i_1i_2\cdots i_n} = \alpha_{i_1j_1}\alpha_{i_2j_2}\cdots\alpha_{i_nj_n}p_{j_1j_2\cdots j_n} \tag{2.3.24}$$

转换，则该 3^n 个数定义一个 n 阶张量。

由 n 阶张量的定义可知，当 $n=0$ 时，称为零阶张量。零阶张量的分量只有一个即 3^0 个，满足 $p'=p$ 的关系，这个零阶张量是一个标量。

当 $n=1$ 时，称为一阶张量。一阶张量的分量有三个即 3^1 个，满足 $p'_{i_1} = \alpha_{i_1j_1}p_{j_1}$ 的关系，这个一阶张量是一个矢量。

在任意直角坐标系中，若 n 阶张量的 3^n 个分量均为零，满足(2.3.24)式中的关系，这样的 n 阶张量称为零张量，以 0 表之。

2.3.3　张量的代数运算和微分运算

(1)张量的加减

设 $P = p_{i_1i_2\cdots i_n}$，$Q = q_{i_1i_2\cdots i_n}$ 是两个 n 阶张量，在每一个直角坐标系内，它们的分量之和或差 T 或 $t_{i_1i_2\cdots i_n}$ 也是一个 n 阶张量，即

$$T = P \pm Q$$

或

$$t_{i_1i_2\cdots i_n} = p_{i_1i_2\cdots i_n} \pm q_{i_1i_2\cdots i_n} \tag{2.3.25}$$

若 P 和 Q 在某一直角坐标系内相等，则 $P=Q$ 在任一直角坐标系中成立，$P-Q=0$ 则是零张量。

(2)张量的乘积

设 $P = p_{i_1i_2\cdots i_m}$ 是 m 阶张量，$Q = q_{j_1j_2\cdots j_n}$ 是 n 阶张量，它们的分量乘积 R 或 $r_{i_1i_2\cdots i_mj_1j_2\cdots j_n}$ 是一个 $m+n$ 阶张量，即

$$R = PQ$$

或

$$r_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n} = p_{i_1 i_2 \cdots i_m} q_{j_1 j_2 \cdots j_n} \tag{2.3.26}$$

两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的乘积是二阶张量，称为并矢，即

$$\boldsymbol{ab} = a_i b_j \tag{2.3.27}$$

n 个矢量连乘可以写成并矢形式。n 阶张量 P 可以写成并矢形式，即

$$P = p_{i_1 i_2 \cdots i_n} \boldsymbol{e}_{i_1} \boldsymbol{e}_{i_2} \cdots \boldsymbol{e}_{i_n} \tag{2.3.28}$$

n 阶张量与标量的乘积仍是 n 阶张量。

(3) 张量的收缩

设 n 阶张量 $P = p_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 中有两个下标相同，根据约定求和法则，由 P 得到具有 $n-2$ 个下标的 $n-2$ 阶张量 $Q = p_{i_1 i_2 \cdots i_{n-2} kk}$，称为张量 P 的收缩。

(4) 张量的内积

m 阶张量 P 和 n 阶张量 Q 的乘积 PQ 中，各取出一个下标收缩一次后得到 $m+n-2$ 阶张量，称为张量 P 和 Q 的内积，记为 $P \cdot Q$。并矢 $a_i b_j$ 收缩后，是矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的内积

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_i b_i \tag{2.3.29}$$

二阶张量 $P = p_{ij}$ 和二阶张量 $Q = q_{ij}$ 的内积是二阶张量，即

$$P \cdot Q = p_{ik} q_{kj} \tag{2.3.30}$$

二阶张量 $P = p_{ij}$ 和二阶张量 $Q = q_{ij}$ 二次收缩后得到一个标量 $p_{ij} q_{ji}$，记为 $P : Q$

$$P : Q = p_{ij} q_{ji} \tag{2.3.31}$$

二阶张量 P 和矢量 $\boldsymbol{a}$ 的右向内积为

$$P \cdot \boldsymbol{a} = p_{ij} a_j \tag{2.3.32}$$

左向内积为

$$\boldsymbol{a} \cdot P = a_i p_{ij} \tag{2.3.33}$$

一般情况下右向内积与左向内积不相等。

(5) 张量识别定理

定理一　若 $p_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n}$ 和任意 n 阶张量，$q_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 的内积

$$p_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n} q_{j_1 j_2 \cdots j_n} = t_{i_1 i_2 \cdots i_m} \tag{2.3.34}$$

恒为 m 阶张量，则 $p_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n}$ 必为 $m+n$ 阶张量。

定理二　若 $p_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ 和任意 n 阶张量，$q_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 的乘积

$$p_{i_1 i_2 \cdots i_m} q_{j_1 j_2 \cdots j_n} = t_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n} \tag{2.3.35}$$

恒为 $m+n$ 阶张量，则 $p_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ 必为 m 阶张量。

(6) 张量的梯度

n 阶张量 $P = p_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 的梯度 ∇P 是 $n+1$ 阶张量，定义为

$$\nabla P = \mathrm{grad} P = \frac{\partial}{\partial x_k} p_{i_1 i_2 \cdots i_n} \tag{2.3.36}$$

简记为 $p_{i_1 i_2 \cdots i_n, k}$。事实上，$n$ 阶张量 $P = p_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 的微分为

$$\mathrm{d} p_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} p_{i_1 i_2 \cdots i_n} \right) \mathrm{d} x_k = p_{i_1 i_2 \cdots i_n, k} \mathrm{d} x_k \tag{2.3.37}$$

其中 $\mathrm{d}p_{i_1i_2\cdots i_n}$是 n 阶张量，$\mathrm{d}x_k$ 是一阶张量，由张量识别定理即可推出$\nabla P = p_{i_1i_2\cdots i_n,k}$是 $n+1$ 阶张量。

(7) 张量的散度

n 阶张量 $P = p_{i_1i_2\cdots i_n}$的散度$\nabla \cdot P$ 是 $n-1$ 阶张量，定义为

$$\nabla \cdot P = \mathrm{div}P = \frac{\partial}{\partial x_k}p_{ki_2\cdots i_n} \tag{2.3.38}$$

散度$\nabla \cdot P$ 是由∇P 收缩一次得到的 $n-1$ 阶张量。

(8) 奥高公式

n 阶张量 $P = p_{i_1i_2\cdots i_n}$的奥高公式为

$$\int_S \boldsymbol{n} \cdot P\mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div}P\mathrm{d}V \tag{2.3.39}$$

2.4　二 阶 张 量

2.4.1　二阶张量的主值

设 P 为二阶张量，对空间中任意非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 作张量与矢量的右向内积

$$P \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{2.4.1}$$

则得空间中另一矢量。若矢量 $\boldsymbol{b}$ 和矢量 $\boldsymbol{a}$ 共线，即

$$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a} \tag{2.4.2}$$

则称矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向为张量 P 的主轴方向，λ 称为张量的主值。确定主值 λ 的方程是

$$P \cdot \boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} \tag{2.4.3}$$

展开得

$$\begin{cases} p_{11}a_1 + p_{12}a_2 + p_{13}a_3 = \lambda a_1 \\ p_{21}a_1 + p_{22}a_2 + p_{23}a_3 = \lambda a_2 \\ p_{31}a_1 + p_{32}a_2 + p_{33}a_3 = \lambda a_3 \end{cases} \tag{2.4.4}$$

要使上面的线性齐次代数方程有非零解，必须令

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.4.5}$$

对 λ 展开上述行列式得

$$\lambda^3 - \lambda^2(p_{11}+p_{22}+p_{33}) + \lambda\left(\begin{vmatrix} p_{22} & p_{32} \\ p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{31} \\ p_{13} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix}\right) - \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.4.6}$$

求出主值 λ 后，即可求出 $a_1 : a_2 : a_3$，由此得到对应于主值 λ 的主轴方向。

2.4.2 二阶张量 P 的不变量

第一不变量

$$I_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \tag{2.4.7}$$

第二不变量

$$I_2 = \begin{vmatrix} p_{22} & p_{32} \\ p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{31} \\ p_{13} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 \tag{2.4.8}$$

第三不变量

$$I_3 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{2.4.9}$$

2.4.3 共轭张量 P_c

设 $P = p_{ij}$是一个二阶张量，则 $P_c = p_{ij}$也是一个二阶张量，称为 P 的共轭张量，记为

$$P_c = p_{ij} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \tag{2.4.10}$$

2.4.4 对称张量 S

设 $S = s_{ij}$是一个二阶张量，若分量之间满足

$$p_{ij} = p_{ji} \tag{2.4.11}$$

的关系，对称张量 S 为对称张量，记为

$$S = s_{ij} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{31} \\ s_{12} & s_{22} & s_{32} \\ s_{31} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix} \tag{2.4.12}$$

二阶对称张量 S 的对称性，不因坐标转换而改变。二阶对称张量 S 的三个主值都是实数，而且一定存在三个互相垂直的主轴。二阶对称张量在主轴坐标系中具有最简单的标准形式

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{2.4.13}$$

因此，二阶对称张量 S 可以由三个主值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 表征。二阶对称张量和二次有心曲面一一对应，二次有心曲面可以作为二阶对称张量的几何表示。

2.4.5 反称张量 A

设 $A = a_{ij}$是一个二阶张量，若分量之间满足

$$p_{ij} = -p_{ji} \tag{2.4.14}$$

的关系，张量 A 为反对称张量，记为

$$A = a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & -a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k \tag{2.4.15}$$

反对称张量 A 的反对称性,不因坐标转换而改变。反对称张量 A 的三个分量 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 组成一个矢量 ω。事实上,根据张量识别定理一(2.3.34)式,可以推出 ω_k 是一个矢量,因为在(2.4.15)式中 a_{ij} 是二阶张量,ε_{ijk} 是三阶张量。

反对称张量 A 和矢量 b 的内积,等于矢量 ω 和矢量 b 的矢积,即

$$A \cdot b = a_{ij}b_j = \varepsilon_{ijk}b_j\omega_k = \omega \times b \tag{2.4.16}$$

2.4.6　张量分解定理

二阶张量可以惟一分解成为一个对称张量和一个反对称张量之和,即

$$P = S + A \tag{2.4.17}$$

式中

$$S = \frac{1}{2}(P + P_c), A = -\frac{1}{2}(P + P_c)$$

2.4.7　各向同性张量

若张量的每一分量经过旋转坐标变换后不改变其值,这类张量称为各向同性张量,反之,称为各向异性张量。对 n 阶各向同性张量 $H_{i_1i_2\cdots i_n}$ 可以作如下定义:张量 $H_{i_1i_2\cdots i_n}$ 如果是 n 阶各向同性张量,那么它的每一分量都是旋转坐标变换下的不变量,即

$$H'_{i_1i_2\cdots i_n} = H_{i_1i_2\cdots i_n} \tag{2.4.18}$$

零阶张量(标量)都是各向同性的。

一阶张量(矢量)除零矢量外,都是各向异性的。

二阶各向同性张量 H_{ij} 的形式必为 $\lambda\delta_{ij}$,即

$$H_{ij} = \lambda\delta_{ij} \tag{2.4.19}$$

其中 λ 为一标量。

三阶各向同性张量 H_{ijk} 的形式必为 $\lambda\varepsilon_{ijk}$,即

$$H_{ijk} = \lambda\varepsilon_{ijk} \tag{2.4.20}$$

其中 λ 为一标量。

四阶各向同性张量 H_{ijkl} 的形式必为

$$H_{ijkl} = \nu\delta_{ij}\delta_{kl} + \alpha\delta_{ik}\delta_{jl} + \beta\delta_{il}\delta_{jk} \tag{2.4.21}$$

其中 ν, α, β 为标量。

置换定理

对于 n 阶张量 $H_{i_1i_2\cdots i_n}$ 的任一分量,将分量的每一个下标值作相同的循环置换

$$1\to2, 2\to3, 3\to1 \text{ 或 } 1\to3, 2\to1, 3\to2,$$

则得到张量 $H_{i_1i_2\cdots i_n}$ 的另一分量。如果张量 $H_{i_1i_2\cdots i_n}$ 是各向同性张量,则此两个分量相等。例如,对于二阶各向同性张量 H_{ij} 有

$$H_{12}=H_{23}=H_{31},H_{21}=H_{32}=H_{13},H_{11}=H_{22}=H_{33} \tag{2.4.22}$$

对于三阶各向同性张量 H_{ijk} 有

$$\begin{aligned}H_{111}=H_{222}=H_{333},H_{112}=H_{223}=H_{331},H_{113}=H_{221}=H_{332}\\ H_{213}=H_{321}=H_{132},H_{123}=H_{231}=H_{312}\end{aligned} \tag{2.4.23}$$

2.5 正交曲线坐标系

2.5.1 正交曲线坐标系

(1)曲线坐标

若空间任一点可以由三个数(q_1,q_2,q_3)惟一地确定,如图 2.5 所示,则称 q_1,q_2,q_3 为曲线坐标。在直角坐标系中作出的曲面

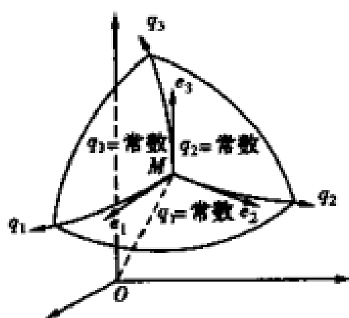


图 2.5 正交曲线坐标

$$q_1=常数,q_2=常数,q_3=常数 \tag{2.5.1}$$

称为曲面坐标系(q_1,q_2,q_3)的坐标面,坐标线是两个不同坐标面的交线,分别表示为 q_1,q_2,q_3。在坐标线上的单位矢量是 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$,单位矢量的方向随流场中空间点位置不同而改变。若单位矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 互相正交,则称由曲线坐标 q_1,q_2,q_3 组成的坐标系是正交曲线坐标系,否则是斜交曲线坐标系。

(2)弧元素与拉梅系数

给定曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q_1,q_2,q_3)$,弧元素矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在曲线坐标系中的表达式为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\mathrm{d}q_3 \tag{2.5.2}$$

其中 $\partial \boldsymbol{r}/\partial q_i(i=1,2,3)$ 的大小用拉梅系数 H_1,H_2,H_3 来表示,即

$$\begin{cases}\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}=H_1\\ \left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}=H_2\\ \left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}=H_3\end{cases} \tag{2.5.3}$$

引入拉梅系数 H_1,H_2,H_3 后,(2.5.2)式可改写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=H_1\mathrm{d}q_1\boldsymbol{e}_1+H_2\mathrm{d}q_2\boldsymbol{e}_2+H_3\mathrm{d}q_3\boldsymbol{e}_3 \tag{2.5.4}$$

弧元素 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在坐标轴上的投影为(图 2.6)

$$\mathrm{d}s_1=H_1\mathrm{d}q_1,\mathrm{d}s_2=H_2\mathrm{d}q_2,\mathrm{d}s_3=H_3\mathrm{d}q_3, \tag{2.5.5}$$

弧元素 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的大小为

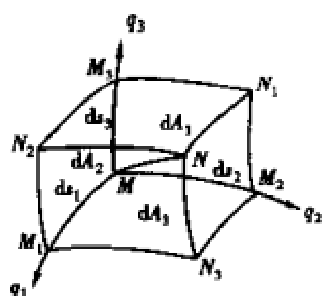


图2.6　弧元素矢量

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2 \tag{2.5.6}$$

以 ds_1, ds_2, ds_3 为边的平行六面体体积为

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 \tag{2.5.7}$$

平行六面体各面的面积为

$$\begin{cases} dA_1 = ds_2 ds_3 = H_2 H_3 dq_2 dq_3 \\ dA_2 = ds_3 ds_1 = H_3 H_1 dq_3 dq_1 \\ dA_3 = ds_1 ds_2 = H_1 H_2 dq_1 dq_2 \end{cases} \tag{2.5.8}$$

(3)单位矢量对坐标的偏导数

单位矢量 e_i 对曲线坐标 q_i 的九个偏导数，可利用下面的公式计算：

当 $i=j$ 时，置换 i,j,k，计算公式为

$$\frac{\partial e_i}{\partial q_i} = -\frac{1}{H_j}\frac{\partial H_i}{\partial q_j}e_j - \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial q_k}e_k \tag{2.5.9}$$

当 $i \neq j$ 时，计算公式为

$$\frac{\partial e_i}{\partial q_j} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_j}{\partial q_i}e_j \tag{2.5.10}$$

(2.5.9)式代表的三个计算公式为

$$\frac{\partial e_1}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}e_2 - \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}e_3$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}e_3 - \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}e_1$$

$$\frac{\partial e_3}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}e_1 - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}e_2$$

(2.5.10)式代表的六个计算公式为

$$\frac{\partial e_1}{\partial q_2} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}e_2 \qquad \frac{\partial e_1}{\partial q_3} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}e_3$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}e_1 \qquad \frac{\partial e_2}{\partial q_3} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}e_3$$

$$\frac{\partial e_3}{\partial q_1} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}e_1 \qquad \frac{\partial e_3}{\partial q_2} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}e_2$$

2.5.2　正交曲线坐标系中的表达式

梯度在正交曲线坐标系中的表达式为

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}e_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}e_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial \varphi}{\partial q_3}e_3 \tag{2.5.11}$$

散度在正交曲线坐标系中的表达式为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial(u_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(u_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(u_3 H_1 H_2)}{\partial q_3}\right] \tag{2.5.12}$$

旋度在正交曲线坐标系中的表达式为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{u} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\begin{vmatrix} H_1\boldsymbol{e}_1 & H_2\boldsymbol{e}_2 & H_3\boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1u_1 & H_2u_2 & H_3u_3 \end{vmatrix} \tag{2.5.13}$$

拉普拉斯算子在正交曲线坐标系中的表达式为

$$\Delta\varphi = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)\right] \tag{2.5.14}$$

2.5.3 柱坐标系

(1)柱坐标

在柱坐标系中,柱坐标为

$$q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = z \tag{2.5.15}$$

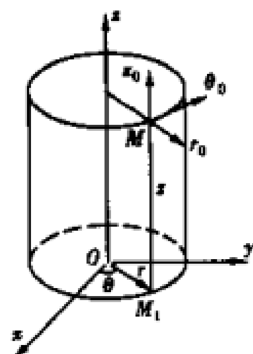


图 2.7 柱坐标系

r 由 0 变化到∞,θ 由 0 变化到 2π,z 由 $-\infty$ 变化到 $+\infty$,如图 2.7 所示。

柱坐标面分别

$$r = 常数, \theta = 常数, z = 常数 \tag{2.5.16}$$

r = 常数的坐标面是以 r 为半径、平行于 z 轴的直线为母线的圆柱面,θ = 常数的坐标面是过 Oz 轴的半平面,z = 常数的坐标面是垂直于 Oz 轴的平面。柱坐标与直角坐标的关系为

$$x = r\cos\theta, y = \sin\theta, z = z \tag{2.5.17}$$

r 坐标线是由 z 轴出发且垂直于 z 轴的射线,θ 坐标线是圆心在 z 轴且平行于 xy 平面的圆周,z 坐标线是平行于 Oz 轴的直线。

(2)拉梅系数

柱坐标系的拉梅系数为

$$H_1 = 1, H_2 = r, H_3 = 1 \tag{2.5.18}$$

(3)弧元素与平行六面体

柱坐标系中弧元素的大小为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{2.5.19}$$

平行六面体的体积为

$$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \tag{2.5.20}$$

梯度在柱坐标系中的表达式为

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{2.5.21}$$

散度在柱坐标系中的表达式为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{2.5.22}$$

旋度在柱坐标系中的表达式为

$$\begin{cases} \mathrm{rot}_r \boldsymbol{u} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \mathrm{rot}_\theta \boldsymbol{u} = \dfrac{\partial u_r}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial r} \\ \mathrm{rot}_z \boldsymbol{u} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} \end{cases} \tag{2.5.23}$$

拉普拉斯算子在柱坐标系中的表达式为

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \tag{2.5.24}$$

2.5.4 球坐标系

(1)球坐标

在球坐标系中,球坐标为

$$q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \psi \tag{2.5.25}$$

r 由 0 变化到∞,θ 由 0 变化到 π,ψ 由 0 变化到 2π,如图 2.8 所示。球坐标面分别是

$$r = 常数, \theta = 常数, \psi = 常数 \tag{2.5.26}$$

r = 常数的坐标面是以 O 为圆心的球面,θ = 常数的坐标面是以 Oz 轴为轴线的圆锥面,ψ = 常数的坐标面是过 Oz 轴的半平面。

坐标线是矢径线,θ 坐标线是经线,ψ 坐标线是纬线。

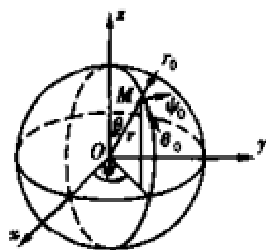


图 2.8 球坐标系

球坐标与直角坐标的关系为

$$x = r\sin\theta\cos\psi, y = r\sin\theta\sin\psi, z = r\cos\theta \tag{2.5.27}$$

(2)拉梅系数

球坐标系的拉梅系数为

$$H_1 = 1, H_2 = r, H_3 = r\sin\theta \tag{2.5.28}$$

(3)弧元素与平行六面体

球坐标系中弧元素的大小为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\psi^2 \tag{2.5.29}$$

平行六面体的体积为

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi \tag{2.5.30}$$

梯度在球坐标系中的表达式为

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial \psi}\boldsymbol{e}_\psi \tag{2.5.31}$$

散度在球坐标系中的表达式为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} \tag{2.5.32}$$

旋度在球坐标系中的表达式为

$$\begin{cases}\mathrm{rot}_r\boldsymbol{u} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(u_\psi\sin\theta)}{\partial\theta} - \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\psi}\\ \mathrm{rot}_\theta\boldsymbol{u} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_r}{\partial\psi} - \dfrac{1}{r}\sin\dfrac{\partial(ru_\psi)}{\partial r}\\ \mathrm{rot}_\psi\boldsymbol{u} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}\end{cases} \tag{2.5.33}$$

拉普拉斯算子在球坐标系中的表达式为

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} \tag{2.5.34}$$

习　　题

2.1　给定标量场 φ，设在 M 点上已知 s_1 方向的方向导数 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial s_1}$ 和 s_2 方向的方向导数 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial s_2}$，试用几何方法求 M 点上的梯度 $\mathrm{grad}\varphi$。

2.2　设在 $x-y$ 平面上

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

求证等位线 $\varphi=$ 常数和 $\psi=$ 常数相互正交。

2.3　求证梯度矢量 $\mathrm{grad}\varphi$ 在任一方向 s 上的投影等于该方向的方向导数：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos(n,s)$$

2.4　证明下列各式：

(1) $\mathrm{grad}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$；　　(2) $\mathrm{grad}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{c}$；

(2) $\mathrm{div}\boldsymbol{r} = 3$；　　(4) $\mathrm{div}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \dfrac{2}{r}$。

2.5　利用哈密顿符号法和张量表示法证明下列各式：

(1) $\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\varphi = \Delta\varphi$；　　(2) $\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{u} = 0$；

(3) $\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\varphi = 0$；　　(4) $\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{u} = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\boldsymbol{u} - \Delta\boldsymbol{u}$；

(5) $\Delta(\varphi\psi) = \psi\Delta\varphi + \varphi\Delta\psi + 2\mathrm{grad}\varphi\cdot\mathrm{grad}\psi$。

2.6　利用哈密顿符号法和张量表示法证明下列各式：

(1) $\mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{u}) = \varphi\mathrm{div}\boldsymbol{u} + \mathrm{grad}\varphi\cdot\boldsymbol{u}$；　　(2) $\mathrm{rot}(\varphi\boldsymbol{u}) = \varphi\mathrm{rot}\boldsymbol{u} + \mathrm{grad}\varphi\times\boldsymbol{u}$；

(3) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\mathrm{div}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\mathrm{div}\boldsymbol{u}$；

(4) $\mathbf{grad}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$；

(5) $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = \mathrm{grad}\dfrac{u^2}{2} - \boldsymbol{u}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{u}$。

2.7　利用哈密顿符号法和张量表示法证明下列各式：

(1) $\int_V \mathrm{grad}\varphi\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{n}\varphi\mathrm{d}S$；　　(2) $\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{u}\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S$；

(3) $\int_V \mathrm{rot}\boldsymbol{u}\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u}\mathrm{d}S$；　　(4) $\int_V \Delta\varphi \mathrm{d}V = \int_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S = \int_S \boldsymbol{n}\nabla\varphi\mathrm{d}S$；

(5) $\int_V (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\mathrm{d}V = \int_S (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{v}\mathrm{d}S$，其中 $\boldsymbol{u}$ 是常矢量；

(6) $\int_V \Delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}V = \int_S \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial n}\mathrm{d}S = \int_S (\boldsymbol{n}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\mathrm{d}S$。

2.8　利用 $\mathrm{div}\boldsymbol{u}$ 和 $\mathrm{rot}\boldsymbol{u}$ 的定义推导它们在柱坐标和球坐标中的表达式。

2.9　若 P 为对称张量，证明：

(1) $P = P_c$；(2) $\boldsymbol{b}\cdot(P\cdot\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}(P\cdot\boldsymbol{b})$，其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为矢量。

2.10　若 P 为反对称张量，证明：

(1) $P = -P_c$；(2) $\boldsymbol{b}\cdot(P\cdot\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}(P\cdot\boldsymbol{b}) = 0$，其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为矢量。

2.11　将张量 p_{ij} 分解成对称部分和反对称部分。证明与反对称部分相当的矢量 ω 具有下列形式

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{p}_i]$$

2.12　将并矢张量 $\boldsymbol{ab}$ 分解成对称部分和反对称部分. 证明与反对称部分相当的矢量 ω 是

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$$

2.13　将张量 $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$ 分解成对称部分和反对称部分。证明反对称部分相当的矢量

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\boldsymbol{a};$$

若 $\mathrm{d}a_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j$，试证

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = S\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\mathrm{rot}\boldsymbol{a} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

其中 S 是张量 $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$ 的对称部分。

2.14　张量 P 为反对称张量的充分必要条件是：对任意矢量有等式

$$\boldsymbol{a}\cdot(P\cdot\boldsymbol{a}) = 0$$

成立。

2.15　若张量 $P = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{p}_i$。试证明其不变量为

$$I_1 = \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{p}_3$$

$$I_2 = \boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{p}_2\times\boldsymbol{p}_3) + \boldsymbol{e}_2\cdot(\boldsymbol{p}_3\times\boldsymbol{p}_1) + \boldsymbol{e}_3\cdot(\boldsymbol{p}_1\times\boldsymbol{p}_2)$$

$$I_3 = \boldsymbol{p}_1\cdot(\boldsymbol{p}_2\times\boldsymbol{p}_3)$$

第 3 章

流体力学基本概念

流体力学研究流体在外力作用下的平衡和宏观运动规律。影响流体处于平衡状态或发生宏观运动的因素，除了流体的物理属性外，还有流动空间的形状和边界的几何特征，以及流动边界上的作用力和作用时间。本章将作用在流体上的外力、描述流体运动的方法、流体微团的运动分析涉及到的应力张量、应变张量、随体导数，以及相关的概念，作为流体力学基本概念来介绍，为以后学习铺平道路。

3.1 作用在流体上的力

流体无论处于运动状态还是静止状态，都要承受力的作用。作用在流体上的外力可以分为质量力和表面力两大类。在流体中取一个界面为封闭曲面 S 的体积，作用在体积内各个流体微团上的力称为质量力；作用在表面 S 上的力称为表面力，简称面力。重力、引力和惯性力是质量力，压力、摩擦力是面力。

流体受外力作用后，将产生抵抗外力的内力。内力是流体内部各部分之间的相互作用力。设想由一个任意截面将一"刚体化"的流体团截开，外力引起的内力就会在截面上显现出来，内力是分布于流体截面上的表面力。根据牛顿第三定律，内力总是成对出现的。由于内力是和假想截面联系着的，对于没有截开的"刚体化"流体团，其上只有外力作用。

3.1.1 质量力和表面力

(1) 质量力

质量力是用它在空间的分布密度来表示的。在体积 τ 内任取一点 M，围绕 M 点作体积元素 $\delta\tau$，它的质量为 δm，作用在其上的质量力为 $\delta \boldsymbol{F}$，若存在下面的极限值

$$f = \lim_{\delta m \to 0} \frac{\delta \boldsymbol{F}}{\delta m} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}m} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\tau} \tag{3.1.1}$$

则式中的极限值 f 代表 M 点上单位质量流体所受到的质量力，它是空间坐标 x, y, z 和时间 t 的函数，称为质量力在空间的分布密度，其量纲是[LT^{-2}]。

作用在体积元素 $\delta\tau$ 的质量力是

$$dF = \rho f d\tau$$

有限体积体积 τ 上的质量力为

$$F = \int_\tau \rho f d\tau \tag{3.1.2}$$

式中 $d\tau$ 可表示为微元立方体积 $dxdydz$，是三阶无穷小量，质量力密度 f 是有限量，由(3.1.2)式可知，与 $d\tau$ 同阶的微元质量力 dF 也是三阶无穷小量。

如果质量力 F 有势，可表示为

$$F = -\nabla \tilde{V} \tag{3.1.3}$$

式中$\tilde{V}$是力势函数。当质量力是重力时，$\tilde{V} = gz$。

(2)表面力

面力是与体积 τ 的界面 S 接触的流体或固体作用于表面 S 上的力。面力用它在表面 S 上的分布密度来表示。在表面 S 上任取一点 N，作面积元素 ΔS 包住 N 点。设 ΔS 的法线为 $\boldsymbol{n}$，作用在 ΔS 上的面力为 $\Delta \boldsymbol{P}$，令 ΔS 向 N 点收缩。若存在下面的极限值

$$\boldsymbol{p}_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta S} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dS} \tag{3.1.4}$$

则 $\boldsymbol{p}_n$代表 N 点上以 $\boldsymbol{n}$ 为法线的单位面积上所受的面力。$\boldsymbol{p}_n$称为面力在 S 面上的分布密度，或称为应力，其量纲是$[ML^{-1}T^{-2}]$。应力 $\boldsymbol{p}_n$是空间坐标 x,y,z 和时间 t 的函数，依赖于作用面的方向。作用在 ΔS 面上的面力为

$$d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_n dS \tag{3.1.5}$$

而作用在有限面积 S 上的面力为

$$\boldsymbol{P} = \int_S \boldsymbol{p}_n dS \tag{3.1.6}$$

面积元素 ΔS 是二阶无穷小量，应力 $\boldsymbol{p}_n$是有限量，由(3.1.5)式可知，与面积元素 dS 同量阶的微元面力 $d\boldsymbol{P}$ 也是二阶无穷小量。

3.1.2　静止流体的应力状态

(1)微元四面体受力状态

过任一点 M 可以有无数个方向不同的表面，作用在这些表面上的面力一般是互不相等的。M 点处的应力 $\boldsymbol{p}_n$是矢径 $\boldsymbol{r}$ 和表面单位法线矢量 $\boldsymbol{n}$ 的函数。但是，过同一点不同表面上的应力并不是不相关的。事实上，只要知道一点处三个坐标面上的应力或者它们的九个分量，就可以将任一法线矢量为 $\boldsymbol{n}$ 的表面上的应力表示出来。

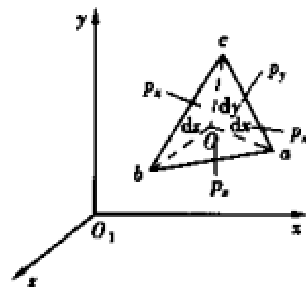


图 3.1　微小四面体受力状态

在流体中取微元四面体 $Oabc$，如图 3.1 所示，底面 abc 的法线矢量为 $\boldsymbol{n}$，面积为 dS，其余三个表面 Obc，Oac 和 Oab 的外法线方向分别与坐标轴 x 轴、y 轴和 z 轴的正方向相反，相应的面积分别为 dS_x，dS_y和 dS_z。作用在这些面上的应力是 $-\boldsymbol{p}_x$，$-\boldsymbol{p}_y$，$-\boldsymbol{p}_z$和 $\boldsymbol{p}_n$。作用于四面体上的力有质量力(包括外力和惯性力)和面力，还受力矩作用。由于质量力是三阶无穷小量，面力是二阶无穷小量，因此当四面体趋

于零时不考虑外力和惯性力的作用，也不考虑力矩的作用。于是可以写出下面的面力平衡条件

$$\boldsymbol{p}_n \mathrm{d}S - \boldsymbol{p}_x \mathrm{d}S_x - \boldsymbol{p}_y \mathrm{d}S_y - \boldsymbol{p}_z \mathrm{d}S_z = 0 \tag{3.1.7}$$

四面体三个表面 $\mathrm{d}S_x$，$\mathrm{d}S_y$ 和 $\mathrm{d}S_z$ 可表示为

$$\begin{cases} \mathrm{d}S_x = \cos(n,x)\mathrm{d}S = \alpha \mathrm{d}S \\ \mathrm{d}S_y = \cos(n,y)\mathrm{d}S = \beta \mathrm{d}S \\ \mathrm{d}S_z = \cos(n,z)\mathrm{d}S = \gamma \mathrm{d}S \end{cases} \tag{3.1.8}$$

式中 α,β,γ 分别代表坐标系 x 轴、y 轴和 z 轴与单位法线矢量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角的方向余弦 $\cos(n,x)$，$\cos(n,y)$，$\cos(n,z)$。于是(3.1.7)式变为

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_x \alpha + \boldsymbol{p}_y \beta + \boldsymbol{p}_z \gamma \tag{3.1.9}$$

应力矢量 $\boldsymbol{p}_n$ 在直角坐标轴上的投影的三个应力分量，分别以 p_{nx}，p_{ny}，p_{nz} 表示。应力分量的第一个下标代表作用面的法线矢量的方向，第二个下标代表应力在直角坐标轴上的投影方向。$\boldsymbol{p}_n$ 在法线 $\boldsymbol{n}$ 方向的投影 p_{nn} 称为法向应力，在切线 $\boldsymbol{\tau}$ 方向的投影 $p_{n\tau}$ 称为切向应力。(3.1.13)式描述的应力对称的结论(3.1.9)式在直角坐标系中表示为

$$\begin{cases} p_{nx} = p_{xx}\alpha + p_{yx}\beta + p_{zx}\gamma \\ p_{ny} = p_{xy}\alpha + p_{yy}\beta + p_{zy}\gamma \\ p_{nz} = p_{xz}\alpha + p_{yz}\beta + p_{zz}\gamma \end{cases} \tag{3.1.10}$$

三个应力分量 $\boldsymbol{p}_x$，$\boldsymbol{p}_y$，$\boldsymbol{p}_z$ 的九个分量的组合记为 P，可写成下面的形式

$$P = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \tag{3.1.11}$$

(3.1.11)式完全描写了静止流体一点的应力状况，以后称 P 为应力张量。(3.1.10)式可用 P 表示为

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{n} \cdot P \tag{3.1.12}$$

式中单位法线矢量为

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}\alpha + \boldsymbol{j}\beta + \boldsymbol{k}\gamma$$

(2) 应力张量

根据张量的定义，三个应力分量 $\boldsymbol{p}_x$，$\boldsymbol{p}_y$，$\boldsymbol{p}_z$ 的九个分量的组合 P 是一个二阶张量。可以证明，应力张量 P 是二阶对称张量，即

$$p_{ij} = p_{ji} \tag{3.1.13}$$

事实上，在流体内任取体积元 V，其界面为 S，在 V 内取一点 O 作为力矩参考点。因为作用在 S 面上的合面力矩等于零，即

$$\int_S \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_n \mathrm{d}S = 0 \tag{3.1.14}$$

上式写成张量形式为

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j p_k \mathrm{d}S = \int_S \varepsilon_{ijk} x_j p_{kl} n_l \mathrm{d}S =$$

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (x_j p_{kl})}{\partial x_l} \mathrm{d}V = \int_V \varepsilon_{ijk} \left(p_{kj} + x_j \frac{\partial p_{kl}}{\partial x_l} \right) \mathrm{d}V = 0$$

因为 O 点在体积元 V 内，x_j 是一阶无穷小量，式中被积函数的第二项与第一项相比是高阶小量，可以忽略不计，于是得

$$\int_V \varepsilon_{ijk} p_{kj} \mathrm{d}V = 0 \tag{3.1.15}$$

由于选取体积元 V 的任意性，并考虑到 i,j,k 各不相同，立即推出

$$\varepsilon_{ijk} p_{kj} = \varepsilon_{ijk}(p_{kj} - p_{jk}) = 0$$

由上式得到

$$p_{ij} = p_{ji}$$

即(3.1.13)式描述的应力对称的结论。

将应力张量 P 中各分量的脚标 x,y,z，换为 1,2,3，于是对称张量 P 可写成

$$P = p_{ij} = p_{ji} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \tag{3.1.16}$$

应力张量 P 中只有六个不同的分量，它的对角线分量 p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} 是法向应力；非对角线分量 p_{xy}, p_{yz}, p_{zx} 是切向应力。

(3) 应力张量的性质

应力张量 P 是二阶对称张量，它具有二阶对称张量所有的性质。

应力张量 P 的几何表示是应力二次曲面，即

$$\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{r}) = p_{xx}x^2 + p_{yy}y^2 + p_{zz}z^2 + 2p_{xy}xy + 2p_{yz}yz + 2p_{zx}zx = 1 \tag{3.1.17}$$

应力二次曲面上任一矢径方向为 $\boldsymbol{n}$ 的那一点处的法线方向，可以给出 $\boldsymbol{n}$ 方向上的应力 p_n。

应力张量 P 具有三个互相垂直主轴方向，在主轴坐标系中，应力张量 P 可写为

$$P = \begin{pmatrix} p'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p'_{33} \end{pmatrix} \tag{3.1.18}$$

式中 $p'_{11}, p'_{22}, p'_{33}$ 是法向主应力。(3.1.18)式表明，与主轴方向垂直的面上，只有法向应力，切向应力均为零。

应力张量 P 具有三个不变量。应力张量 P 的不变量 I_1, I_2, I_3 分别为

$$I_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33} = p'_{11} + p'_{22} + p'_{33} \tag{3.1.19}$$

$$I_2 = p_{22}p_{33} + p_{33}p_{11} + p_{11}p_{22} - p_{21}^2 - p_{31}^2 - p_{12}^2 = p'_{22}p'_{33} + p'_{33}p'_{11} + p'_{11}p'_{22} \tag{3.1.20}$$

$$I_3 = p_{11}p_{22}p_{33} + 2p_{12}p_{23}p_{31} - p_{22}p_{31}^2 - p_{33}p_{12}^2 - p_{11}p_{23}^2 = p'_{11}p'_{22}p'_{33} \tag{3.1.21}$$

3.2 描述流体运动的方法

在流体力学中描述流体运动的描述方法有两种，一种是拉格朗日方法，另一种是欧拉方法。拉格朗日方法的观点是着眼于流体质点，设法描述出每个流体质点自始至终的运动过程，

以了解整个流体运动的情况。欧拉方法不着眼于流体质点，而是着眼于空间点，即在流体运动的全部空间中考察速度、压力、密度以及其他流体量的分布，完整地了解这种分布随时间的变化规律。

3.2.1 拉格朗日方法

拉格朗日方法利用初始时刻($t=t_0$)流体质点的坐标作为区分不同流体质点的标志，它们可以是初始时刻的直角坐标(x_0,y_0,z_0)或其他曲线坐标。我们约定采用a,b,c的组合(a,b,c)来代表初始时刻的坐标，不管是直角坐标还是其他曲线坐标。赋予a,b,c不同的数值，将代表不同坐标的流体质点，因此a,b,c是流体质点标号，也叫拉格朗日坐标或流体坐标。

(1)流体质点的位移矢径

拉格朗日方法中，用流体质点的位移矢径表示流体质点运动的规律，它是流体质点标号a,b,c的函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a,b,c,t) \tag{3.2.1}$$

在直角坐标系中的分量为

$$\begin{aligned} x&=x(a,b,c,t)\\ y&=y(a,b,c,t)\\ z&=z(a,b,c,t) \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

式中的变数a,b,c,t称为拉格朗日变数。上式表明了流体流动空间中所有流体质点的运动和分布情况。如果固定流体质点标号a,b,c而令时间t改变，可求得某一流体质点的运动规律；如果固定时间t而令流体质点标号a,b,c改变，则得到同一时刻不同流体质点的位置分布规律。

(2)轨迹

流体质点运动时，其位置随时间变化而发生改变。在流动空间中，将同一质点先后经过的空间点连接起来的曲线称为该质点的轨迹。在矢径函数中消去时间t后便得到流体质点的轨迹。轨迹给出了同一质点经过的路径及其在不同位置时的速度方向，是矢径函数的几何表示。

(3)流体质点的速度和加速度

假定矢径函数(3.2.1)式具有二阶连续偏导数，流体质点的速度是矢径对时间t的一阶偏导数，即

$$\boldsymbol{u}=\frac{\partial \boldsymbol{r}(a,b,c,t)}{\partial t} \tag{3.2.3}$$

速度在直角坐标系中的分量为

$$u_x=\frac{\partial x(a,b,c,t)}{\partial t},u_y=\frac{\partial y(a,b,c,t)}{\partial t},u_z=\frac{\partial z(a,b,c,t)}{\partial t} \tag{3.2.4}$$

流体质点的加速度是速度对时间t的偏导数，即矢径对时间t的二阶偏导数：

$$\dot{\boldsymbol{u}}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(a,b,c,t)}{\partial t^2} \tag{3.2.5}$$

加速度在直角坐标系中的分量为

$$\dot{u}_x=\frac{\partial^2 x(a,b,c,t)}{\partial t^2},\dot{u}_y=\frac{\partial^2 y(a,b,c,t)}{\partial t^2},\dot{u}_z=\frac{\partial^2 z(a,b,c,t)}{\partial t^2} \tag{3.2.6}$$

3.2.2　欧拉方法

(1)流场各点的速度

在欧拉方法中描述流体在流场中的运动规律，是用不同时刻所有流体质点经过流场空间各点的速度函数来表示的，其矢量形式为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) \tag{3.2.7}$$

其中矢径函数 $\boldsymbol{r}$ 是空间点坐标 x,y,z 的函数。速度在直角坐标系中的分量为

$$\begin{cases} u_x = u_x(x,y,z,t) \\ u_y = u_y(x,y,z,t) \\ u_z = u_z(x,y,z,t) \end{cases} \tag{3.2.8}$$

式中的变数 x,y,z,t 称为欧拉变数。(3.2.7)式表明了流体流动空间中各点速度的变化和分布情况。如果固定 x,y,z 而令 t 改变，可求得空间点上速度随时间的变化规律；如果固定 t 而令 x,y,z 改变，则得到某一时刻速度在空间中分布规律。欧拉方法用速度函数、压力 $p=p(x,y,z,t)$、密度 $\rho=\rho(x,y,z,t)$ 和温度 $T=T(x,y,z,t)$ 等状态函数一起完全描述了流体的运动情况。

(2)速度的随体导数

我们从速度函数(3.2.7)式出发求加速度。设流体质点的运动轨迹为 L，如图3.2所示，质点在 t 时刻位于 M 点，速度为 $\boldsymbol{u}(M,t)$。曲线 L 在 M 点处的单位切向矢量为 $\boldsymbol{s}_0$，速度 $\boldsymbol{u}$ 可表示为 $\boldsymbol{u}=u\boldsymbol{s}_0$。经过时间 Δt 后，质点在 $t+\Delta t$ 时刻运动至 M_1 点，速度为 $\boldsymbol{u}(M_1,t+\Delta t)$。

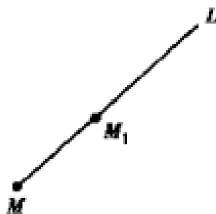


图3.2　流体质点的速度变化

流体质点的加速度为

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(M_1,t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(M,t)}{\Delta t} = \\ &\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(M_1,t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(M_1,t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(M_1,t)-\boldsymbol{u}(M,t)}{\Delta t}\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

上式中右边第一项是由于场的不定常性引起的速度变化为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(M_1,t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(M_1,t)}{\Delta t} = \frac{\partial \boldsymbol{u}(M,t)}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$$

$\partial\boldsymbol{u}/\partial t$ 称为局部导数或当地导数；右边第二项是由于场的不均匀性引起的速度变化，即

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(M_1,t)-\boldsymbol{u}(M,t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{MM_1}{\Delta t}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(M_1,t)-\boldsymbol{u}(M,t)}{MM_1} = \\ & u\frac{\partial \boldsymbol{u}(M,t)}{\partial s} = u(\boldsymbol{s}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ 称为变位导数或对流导数。

由上述分析可知，(3.2.5)式表示的总的速度变化，是局部导数和变位导数之和，即

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} \tag{3.2.10}$$

上式称为速度的随体导数。速度的随体导数在直角坐标系中的分量为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\partial u_x}{t} + u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_x}{\partial z} \\
\dfrac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}y} = \dfrac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\
\dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_z}{\partial z}
\end{cases}
\tag{3.2.11}
$$

欧拉方法中之所以对流体质点加速度取名随体导数，其意是指追随流体质点对其速度进行的求导运算。应该指出，随体导数的概念本质上是拉格朗日观点。

(3)矢量和标量的随体导数

需要说明的是，在流场中采用欧拉方法描述流体的运动时，任何具有一阶连续偏导数的矢量函数 $\boldsymbol{a}$ 或标量函数 φ，其一阶连续偏导数是该矢量函数或标量函数的随体导数。按(3.2.10)式将其随体导数分解为局部导数和变位导数之和的方法，对于它们都成立：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} \tag{3.2.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\varphi \tag{3.2.13}$$

(3.2.13)式标量函数 φ 的变位导数中，直接写出了哈密顿算子作用于标量函数 φ 的梯度矢量形式 $\nabla\varphi$。

根据(3.2.13)式，可以通过密度函数 $\rho(x,y,z,t)$ 的随体导数来提出不可压缩流体的数学描述。密度函数 $\rho(x,y,z,t)$ 的随体导数为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\rho \tag{3.2.14}$$

式中密度的局部导数 $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ 表示密度随时间的变化；密度的变位导数 $\boldsymbol{u} \cdot \nabla\rho$ 表示密度在速度方向的变化率，其中密度的梯度 $\nabla\rho$ 表示密度在流动空间中的分布。

流场中各点的密度在运动过程中保持不变的流体，称为不可压缩流体。不可压缩流体并不一定是均质流体，不可压缩流体其整个运动的全过程中，虽然每个空间点上的密度不变，但是这个点的密度和那个点的密度可以不相同，这种情况下不可压缩流体的数学表示为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

均质流体是指流场中不同空间点的密度都是相同的，即流场中密度的梯度为零，但是均质流体并不是不可压缩的，均质流体的数学表示为

$$\nabla\rho = 0$$

如果密度的随体导数为零，即

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0$$

上式表示流体既是不可压缩流体，也是均质流体，它的密度不论在流场中什么地方、什么时候都是同一常数。上面通过密度的随体导数表达式，对不可压缩流体、均质流体和均质不可压缩流体三种流体形态作了数学表述。

(4)流线

对于流场中同一时刻由不同流体质点组成的曲线，如果曲线上任一点的速度方向与曲线

在该点的切线方向重合，称这种曲线为流线。流线是矢量线，刻画了同一时刻不同流体质点的运动方向，它是速度场的几何表示，如图 3.3 所示。

设 dr 是流线上的切向元素，可以用下面的矢量表达式定义流线：

$$d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{u} = 0 \tag{3.2.15}$$

或写为

$$\frac{dx}{u_x(x,y,z,t)} = \frac{dy}{u_y(x,y,z,t)} = \frac{dz}{u_z(x,y,z,t)} \tag{3.2.16}$$

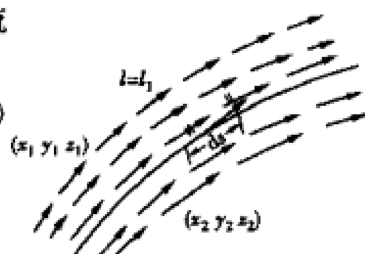


图 3.3　流线

上式是由两个常微分方程组成的流线微分方程组，式中的时间 t 是作为常数来处理的参数。当给定时间 t 的值，由不同的积分常数值可以得到指定时刻的流线簇。流线簇的疏密程度表示速度的大小，流线簇的流线越密集，流体速度越大，反之越小。流线虽然是人们假想的几何线，但是采用流线可以直观地反映流场中流体流动的情况，几何线表示了流体速度的大小和方向。

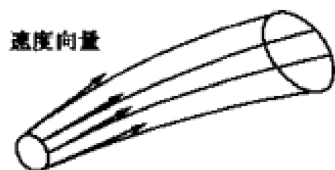


图 3.4　流管

由流体质点组成一非流线的闭合曲线，经过该闭合曲线上每一点的流线所组成的曲面称为流面，这个流面包围的流体称为流管（图 3.4）。流管的管壁是由流线簇组成的，流线的方向就是流动的方向，因此不会有流体从流管的管壁流进或流出。流管是处理管流问题时常常采用的流体力学模型。

需要和流管的概念有所区别的是射流的概念。经过一非轨线的闭合曲线上作轨迹，这些轨迹组成射流面，这个射流面包围的流体称为射流。轨迹和射流的概念是和拉格朗日方法联系在一起的，流线和流管的概念是由欧拉方法引出来的。流体运动不定常时，其轨迹和流线一般不重合。当流体作定常运动时，其轨迹和流线是重合的。

3.2.3　欧拉方法与拉格朗日方法之间的转换

欧拉方法是基于场论的，面场论是研究流体力学理论强有力的数学工具，拉格朗日方法没有这一优越性。由于在流体力学中采用欧拉方法比拉格朗日方法优越，所以描述流体运动时一般采用欧拉方法。应该指出，拉格朗日方法和欧拉方法是用不同的观点来描述同一流体的运动，因此，彼此是可以互相转换的。下面通过例题来说明这种转换。

例 3.2.1　设流体作定常运动，速度函数为

$$u_x = x, u_y = -y, u_z = 0$$

求 $t=0$ 时过 $M(-1,-1)$ 点的流线和轨迹。

解：流线微分方程为

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \tag{1}$$

积分后得 $xy=C$。由初始条件 $t=0, x=-1, y=-1$，可以确定积分常数为 $C=1$。于是，求得 $t=0$时经过空间点 $M(-1,-1)$ 的流线为

$$xy = 1 \tag{2}$$

这是一个双曲线方程。

轨迹应满足的微分方程是

$$\frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = -y \tag{3}$$

对上式积分求得方程的解为

$$x = C_1 e^t, y = C_2 e^{-t} \tag{4}$$

由初始条件 $t=0, x=-1, y=-1$，可以确定积分常数为 $C_1 = C_2 = 1$。于是，得到质点的运动规律为

$$x = e^t, y = e^{-t} \tag{5}$$

在上式中消去时间 t，即得与流线方程相同形式的轨迹方程。这个例子说明，流体作定常运动时其轨迹和流线是重合的。

例 3.2.2 以拉格朗日变数(a,b,c)给出流动规律

$$x = ae^{-2t/k}, y = be^{t/k}, z = ce^{t/k}$$

式中 k 为非零常数。求流线簇方程。

解：流体质点的速度为

$$u_x = -\frac{2a}{k}e^{-2t/k}, u_y = \frac{b}{k}e^{t/k}, u_z = \frac{c}{k}e^{t/k} \tag{1}$$

反演题意给出的流体质点运动规律，得到由欧拉变数表示的拉格朗日变数

$$a = xe^{2t/k}, b = ye^{-t/k}, c = ze^{-t/k} \tag{2}$$

将拉格朗日变数带入流体质点的速度表达式中，得到由欧拉变数表示的速度场

$$\frac{dx}{dt} = u(x,y,z,t) = -\frac{2x}{k}, \frac{dy}{dt} = v(x,y,z,t) = \frac{y}{k}, \frac{dz}{dt} = w(x,y,z,t) = \frac{z}{k} \tag{3}$$

流线微分方程为

$$-\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \tag{4}$$

对上面两个一阶微分方程积分，即得到流线簇方程

$$xy^2 = C_1, y = C_2 z \tag{5}$$

由于流体作定常运动，运动过程中流线保持不变。给定某点坐标 x, y, z 的数值，即可求得经过该点的流线。若求过坐标为(1,2,3)的点的流线，可将坐标的数值代入流线簇方程式，可确定积分常数为 $C_1 = 4, C_2 = 2/3$。于是，得到的流线方程为

$$xy^2 = 4, 3y = 2z \tag{6}$$

例 3.2.3 流体作非定常运动，流场速度分布为

$$u_x = 2x^2, u_y = 4xyt$$

求 $t=1/2$ 和 $t=1$ 时经过点(1,3)的流线。

解：流体作非定常流动，相应的流线微分方程为

$$\frac{dx}{2x^2} = \frac{dy}{4xyt} \tag{1}$$

分部积分上式，得到流线方程

$$y = Cx^{2t} \tag{2}$$

式中积分常数 C 由初始条件确定。当 $t=1/2$ 时，经过点(1,3)的流线为

$$y = 3x \tag{3}$$

当 $t=1$ 时，经过点(1,3)的流线为

$$y = 3x^2 \tag{4}$$

该例表明，对于流体作非定常流动，不同时刻经过流场中同一点的流线是不相同的。

在刚体力学中，对于质点、质点系和刚体等力学模型的运动，采用拉格朗日方法来描述是方便的。流体力学采用拉格朗日方法描述的是连续介质的运动，用流体质点的位移矢径函数来表示流体的运动规律。由于流体的流动性，对于每一流体质点以前和以后的运动情况，一段时间以后去描述往往是困难的，这使拉格朗日方法在流体力学中的应用受到限制。流体质点经过空间点的速度是可以测出的，流体力学便采用欧拉方法考察流体运动空间中速度等流体量的分布和变化情况，并用速度矢量函数来表示流体的运动规律。在研究电磁场理论时，也采用欧拉方法描述电流强度和磁场强度的分布和变化情况。

3.3 速度分解定理

3.3.1 一点邻域的流动

(1) 一点邻域内流体的运动

设 $M_0(x,y,z)$ 点是流场中任意一点，$M(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ 点是 $M_0(x,y,z)$ 点邻域在流体微团内的一点，如图 3.5 所示。M_0点处的速度为 $\boldsymbol{u}_0(x,y,z,t)$，$M_0$点的邻域 M 点处的速度为 $\boldsymbol{u}(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t)$，其中 $\delta x, \delta y, \delta z$ 是一阶无穷小量。将速度 $\boldsymbol{u}$ 在 M 点的邻域内展开成泰勒级数，略去二阶以上无穷小量的项，得

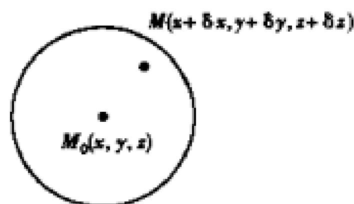


图 3.5　一点邻域内流体的运动

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}\delta z \tag{3.3.1}$$

将上式写成张量形式为

$$u_i = u_{0i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta x_j \tag{3.3.2}$$

根据张量识别定理，可以识别出$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$是一个二阶张量。

(2) 张量分解定理

张量分解定理告诉我们：任意一个二阶张量可以分解为对称张量 $\boldsymbol{S}$ 和反对称张量 $\boldsymbol{A}$ 之和。于是二阶张量$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$可以分解为

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right) = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A} \tag{3.3.3}$$

式中，对称张量 S 为

$$S = s_{ij} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial u_y}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \dfrac{1}{2}\theta_3 & \dfrac{1}{2}\theta_2 \\ \dfrac{1}{2}\theta_3 & \varepsilon_2 & \dfrac{1}{2}\theta_1 \\ \dfrac{1}{2}\theta_2 & \dfrac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \tag{3.3.4}$$

其中对称张量 S 的分量为

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{3.3.5}$$

$$\theta_1 = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \theta_2 = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \theta_3 = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \tag{3.3.6}$$

反对称张量 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A} = a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x} - \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x} - \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right) & 0 & -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y} - \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right) \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y} - \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix} = \tag{3.3.7}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & -a_{31} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k$$

其中

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right), \omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right), \omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tag{3.3.8}$$

即

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\nabla \times \boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \tag{3.3.9}$$

上面的张量表示中，采用了置换符号 ε_{ijk}。置换符号 ε_{ijk} 在张量表示法中经常出现，是很有用的量，它的定义是：

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & i,j,k \text{ 中有两个以上指标相同时} \\ 1, & i,j,k \text{ 为偶排列（如 } \varepsilon_{123}, \varepsilon_{231}, \varepsilon_{312} \text{ 等）} \\ -1, & i,j,k \text{ 为奇排列（如 } \varepsilon_{213}, \varepsilon_{321}, \varepsilon_{132} \text{ 等）} \end{cases}$$

(3.3.9)式表明 ω 是速度的旋度（rot$\boldsymbol{u}$）之半，在以后的讨论中会看到，ω 是流体微团的旋转角速度。式中依次列写了旋转角速度的哈密顿算子表达式，速度旋度的直角坐标分量的行列式

表达式和速度旋度的张量表达式。

3.3.2　柯西-亥姆霍兹速度分解定理

柯西-亥姆霍兹(Cauchy-Helmholtz)速度分解定理告诉我们:流场中流体微团内任意一点的运动可以分解为平动、转动和变形三种形式,即流体微团内任意一点的运动由平动、转动和变形三部分组成。

将(3.3.3)式代入(3.3.2)式,得

$$u_i = u_{0i} + a_{ij}\delta x_j + s_{ij}\delta x_j \tag{3.3.10}$$

(3.3.10)式中第二项是由流体微团转动引起的角速度,即

$$a_{ij}\delta x_j = -\varepsilon_{ijk}\omega_k\delta x_j = \boldsymbol{\omega}\times\delta\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \delta x & \delta y & \delta z \end{vmatrix}$$

(3.3-10)式中第三项是由于流体微团变形引起的速度,即

$$s_{ij}\delta x_j = \boldsymbol{S}\cdot\delta\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1\delta x + \frac{1}{2}\theta_3\delta y + \frac{1}{2}\theta_2\delta z \\ \frac{1}{2}\theta_3\delta x + \varepsilon_2\delta y + \frac{1}{2}\theta_1\delta z \\ \frac{1}{2}\theta_2\delta x + \frac{1}{2}\theta_1\delta y + \varepsilon_3\delta z \end{bmatrix} = \mathrm{grad}\phi$$

其中

$$\phi = \frac{1}{2}(\varepsilon_1\delta x^2 + \varepsilon_2\delta y^2 + \varepsilon_3\delta z^2 + \theta_1\delta y\delta z + \theta_2\delta z\delta x + \theta_3\delta x\delta y)$$

于是,(3.3.10)式变为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_0 + \frac{1}{2}\mathrm{rot}\boldsymbol{u}\times\delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{S}\cdot\delta\boldsymbol{r} = \\ \boldsymbol{u}_0 + \frac{1}{2}\mathrm{rot}\boldsymbol{u}\times\delta\boldsymbol{r} + \mathrm{grad}\phi \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

式中,$\boldsymbol{u}_1$是由流体微团平动引起的平动速度,它是刻画流体微团平动的特征量($\boldsymbol{u}_0$);

$\boldsymbol{u}_2$是由流体微团转动引起的转动角速度,刻画流体微团转动的特征量是速度的旋度($\mathrm{rot}\boldsymbol{u}$),转动角速度可由 rot$u$ 与距离 M_0点微元矢径 $\delta\boldsymbol{r}$ 的矢积求得;

$\boldsymbol{u}_3$是由流体微团变形引起的变形速度,刻画流体微团变形的特征量是二阶对称张量 $\boldsymbol{S}$,M_0点邻域内一点的变形速度可由 $\boldsymbol{S}$ 与 $\delta\boldsymbol{r}$ 的数积或梯度 gradϕ 求得。

(3.3.11)式表明 M_0点的邻域内流体微团的速度是由平动速度 $\boldsymbol{u}_1$,转动速度 $\boldsymbol{u}_2$和变形速度 $\boldsymbol{u}_3$三部分组成的,是柯西-亥姆霍兹速度分解定理的数学表述。

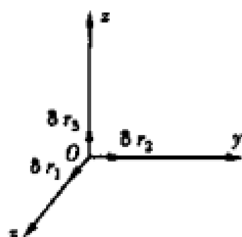
3.4　变形速度张量

在速度分解定理中引进的二阶对称张量 $\boldsymbol{S}$,其各分量是表示流体微团变形的特征量,称二阶对称张量 $\boldsymbol{S}$ 为变形速度张量。下面讨论变形速度张量各分量的物理意义。

3.4.1 线段元的随体导数

取一由流体质点组成的线段元 $\delta \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$，如图 3.6 所示，其随体导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta \boldsymbol{r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0=\delta \boldsymbol{u} \tag{3.4.1}$$



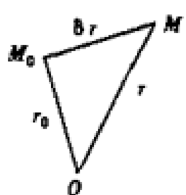


图 3.6 线段元的随体导数

上式表明随体导数算子$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$与微分符号 δ 可以互换。速度 $\boldsymbol{v}$ 是 x,y,z 的函数，线段元 $\delta \boldsymbol{r}$ 的随体导数还可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta \boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\delta x+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\delta y+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}\delta z \tag{3.4.2}$$

在直角坐标系 $Oxyz$ 中的 Ox 坐标轴上，取流体质点组成的线段元 $\delta \boldsymbol{r}_1(\delta x,0,0)$，其随体导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta \boldsymbol{r}_1=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\delta x=\frac{\partial u_x}{\partial x}\delta x\boldsymbol{i}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\delta x\boldsymbol{j}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\delta x\boldsymbol{k} \tag{3.4.3}$$

在 Oy 和 Oz 坐标轴上，分别取流体质点组成的线段元 $\delta \boldsymbol{r}_2(0,\delta y,0)$ 和 $\delta \boldsymbol{r}_3(0,0,\delta z)$，相应的随体导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta \boldsymbol{r}_2=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\delta y=\frac{\partial u_x}{\partial y}\delta y\boldsymbol{i}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\delta y\boldsymbol{j}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\delta y\boldsymbol{k} \tag{3.4.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta \boldsymbol{r}_3=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}\delta z=\frac{\partial u_x}{\partial z}\delta z\boldsymbol{i}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\delta z\boldsymbol{j}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\delta z\boldsymbol{k} \tag{3.4.5}$$

3.4.2 变形速度张量对角线分量的物理意义

下面讨论变形速度张量对角线分量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$的物理意义。将 $\delta \boldsymbol{r}_1(=\delta x\boldsymbol{i})$与(3.4.3)式点乘，得

$$\delta \boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta \boldsymbol{r}_1=\delta x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x=\frac{\partial u_x}{\partial x}\delta x^2$$

即

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{1}{\delta x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x \tag{3.4.6}$$

上式表明，ε_1是线段元 δx 的相对拉伸(压缩)速度，如图 3.7 所示。同理可得

$$\varepsilon_2=\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{1}{\delta y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta y \tag{3.4.7}$$

$$\varepsilon_3=\frac{\partial u_z}{\partial z}=\frac{1}{\delta z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta z \tag{3.4.8}$$

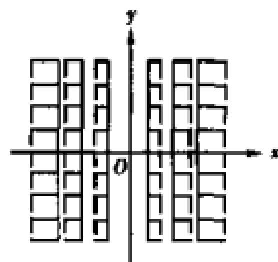


图 3.7 线段元的相对拉伸速度

(3.4.7)和(3.4.8)式表明，ε_2是线段元 δy 的相对拉伸(压缩)速度，ε_3是线段元 δz 的相对拉伸(压缩)速度。$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$通常称为线变形速率或线变率。

3.4.3　变形速度张量非对角线分量的物理意义

对于变形速度张量非对角线分量 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$的物理意义讨论如下。将 $\delta \boldsymbol{r}_1(=\delta x\boldsymbol{i})$点乘(3.4.4)式，$\delta \boldsymbol{r}_2(=\delta y\boldsymbol{j})$点乘(3.4.5)式，分别得

$$\delta \boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta \boldsymbol{r}_2=\frac{\partial u_x}{\partial y}\delta x\delta y,\delta \boldsymbol{r}_2\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta \boldsymbol{r}_1=\frac{\partial u_y}{\partial x}\delta x\delta y$$

两式相加，得

$$\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\delta x\delta y=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta \boldsymbol{r}_1\cdot\delta \boldsymbol{r}_2)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x\delta y\cos\gamma_{xy})=-\delta x\delta y\frac{\mathrm{d}\gamma_{xy}}{\mathrm{d}t}$$

式中 γ_{xy}是 x 轴与 y 轴的夹角，推导上式时已确认 $\sin\gamma_{xy}=1,\cos\gamma_{xy}=0$。由上式得

$$\theta_3=\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}=-\frac{\mathrm{d}\gamma_{xy}}{\mathrm{d}t}=-\dot{\gamma}_{xy}\tag{3.4.9}$$

(3.4.9)式表明，变形速度张量非对角线分量 θ_3是 x 轴与 y 轴的夹角 γ_{xy}变形速率的负值，即夹角 γ_{xy}剪切变形速度的负值，如图3.8所示。同理可得

$$\theta_1=\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)=-\frac{\mathrm{d}\gamma_{yz}}{\mathrm{d}t}=-\dot{\gamma}_{yz}\tag{3.4.10}$$

$$\theta_2=\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=-\frac{\mathrm{d}\gamma_{zx}}{\mathrm{d}t}=-\dot{\gamma}_{zx}\tag{3.4.11}$$

(3.4.10)式和(3.4.11)式表明，变形速度张量非对角线分量 θ_1和 θ_2分别是夹角 γ_{yz}和 γ_{zx}变形速率的负值，即剪切变形速度的负值。$\dot{\gamma}_{yz},\dot{\gamma}_{zx},\dot{\gamma}_{xy}$通常称为角变形速率或切变率。

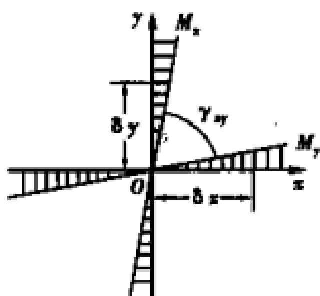


图3.8　夹角的剪切变形速度

3.4.4　变形速度张量的性质

(1)变形二次曲面

变形速度张量是二阶对称张量，因此具有二阶对称张量的性质。变形速度张量和二次有心曲面之间存在一一对应的关系。(3.3.11)式中，M_0点邻域内一点的变形速度 $\boldsymbol{u}_3$可由 $\boldsymbol{S}$ 与 $\delta \boldsymbol{r}$ 的数积或梯度 gradϕ 求得，即

$$\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{S}\cdot\delta \boldsymbol{r}=\mathrm{grad}\phi$$

其中

$$\phi=\frac{1}{2}(\varepsilon_1\delta x^2+\varepsilon_2\delta y^2+\varepsilon_3\delta z^2+\theta_1\delta y\delta z+\theta_2\delta z\delta x+\theta_3\delta x\delta y)$$

变形速度张量对应的二次有心曲面为椭球面，即

$$F=s_{ij}x_ix_j=1$$

或写为

$$2\phi=\varepsilon_1\delta x^2+\varepsilon_2\delta y^2+\varepsilon_3\delta z^2+\theta_1\delta y\delta z+\theta_2\delta z\delta x+\theta_3\delta x\delta y=1\tag{3.4.12}$$

将二次有心曲面(3.4.13)式称为变形二次曲面。变形二次曲面是变形速度张量的几何描述，如图3.9所示。

利用变形二次曲面椭球可以几何地作出 M_0点邻域内一点 M 的变形速度，由图3.9有

$$u_3 = S \cdot \delta r = \mathrm{grad}\phi = \frac{1}{ON}n$$

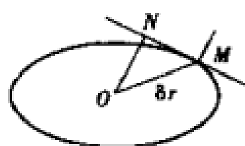


图 3.9 变形二次曲面

可见，变形速度张量 S 的确从几何角度刻画了一点邻域内流体微团的变形情况，流体微团上任一点的速度都可以通过上面介绍的几何方法作出来。

(2)主相对拉伸速度

变形速度张量恒有三个互相垂直的主轴，在以这三个主轴建立的正交直角坐标系中，变形速度张量 S 可以写成下面的标准形式

$$S = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'_3 \end{pmatrix} \tag{3.4.13}$$

$\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3$ 称为主相对拉伸速度。与主相对拉伸速度对应的二次曲面为

$$\varepsilon'_1 \delta x'^2 + \varepsilon'_2 \delta y'^2 + \varepsilon'_1 \delta z'^2 = 1 \tag{3.4.14}$$

上式表明，变形速度张量 S 完全由三个主相对拉伸速度 ε'_i 决定。

(3)变形速度张量的三个基本不变量

第一不变量为

$$I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \mathrm{div}u \tag{3.4.15}$$

第二不变量为

$$I_2 = \varepsilon'_2\varepsilon'_3 + \varepsilon'_3\varepsilon'_1 + \varepsilon'_1\varepsilon'_2 = \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 - \frac{1}{4}(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) \tag{3.4.16}$$

第三不变量为

$$I_3 = \varepsilon'_1\varepsilon'_2\varepsilon'_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \frac{1}{4}\theta_1\theta_2\theta_3 - \frac{1}{4}(\theta_1^2\varepsilon_1 + \theta_2^2\varepsilon_2 + \theta_3^2\varepsilon_3) \tag{3.4.17}$$

十分明显，从这三个不变量出发，可以作出无穷多个不变量。

第一不变量的物理意义是表示流体微团的相对体积膨胀率。事实上，根据散度的定义，速度的散度可表示为

$$\mathrm{div}u = \lim_{\delta V \to 0} \frac{\oint_S u_n \mathrm{d}S}{\delta V}$$

式中 $\oint_S u_n \mathrm{d}S$ 是速度 u 通过封闭曲面 S 的速度通量，也是体积 δV 的变化率，即

$$\oint_S u_n \mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta V$$

于是，得

$$\mathrm{div}u = \frac{1}{\delta V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta V \tag{3.4.18}$$

上式表示速度散度代表流体微团的相对体积膨胀率。由于体积元 $\delta V = \delta x \delta y \delta z$，于是

$$\frac{1}{\delta V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta V = \frac{1}{\delta x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x + \frac{1}{\delta y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta y + \frac{1}{\delta z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta z = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \mathrm{div}\boldsymbol{u}$$

3.5　流体微团的运动分析

在流场中任取一质量为 $\mathrm{d}m$ 的正交六面体流体微团（流体微团的形状可以任意选定），如图 3.10 所示。设给定时刻微团上 A 点的速度为 $\boldsymbol{u}(x,y,z,t)$，A 点附近一点的速度为 $\boldsymbol{u}(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z,t)$。流体微团在流场中运动时，其运动一般可以分解为平移、旋转、线变形和角变形四种运动形式。流体微团的平移运动形式和旋转运动形式都是类似刚体的运动形式；流体微团在运动过程中发生的线变形和角变形，是变形体的运动形式。下面分别考察流体微团这四种运动形式的特点和特征量。

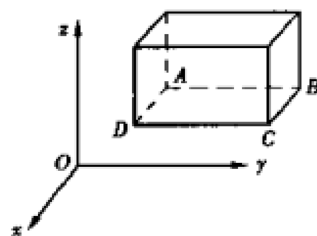


图 3.10　正交六面体流体微团

3.5.1　流体微团的刚体运动形式

（1）平移运动

流体微团作平移运动时，微团类似刚体产生线位移，如图 3.11 所示。A 点移动到 A_1 点，与 xy 坐标面平行的整个平面 $ABCD$ 平移到 $A_1B_1C_1D_1$。平移后的平面 $A_1B_1C_1D_1$ 与平移前的平面 $ABCD$ 形状、大小和对角线的方向都相同。可见，流体微团平移运动的特点是形状、大小和方位（正交六面体对角线的方向）都保持不变，平移运动的特征量是速度 $\boldsymbol{u}$，即单位时间经过的线位移。如果流场中各流体质点以恒定速度沿平行直线作平移运动，这种流动称为均匀流动，如图 3.12 所示。

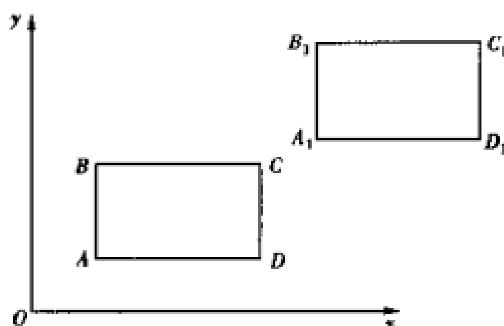


图 3.11　流体微团的平移运动

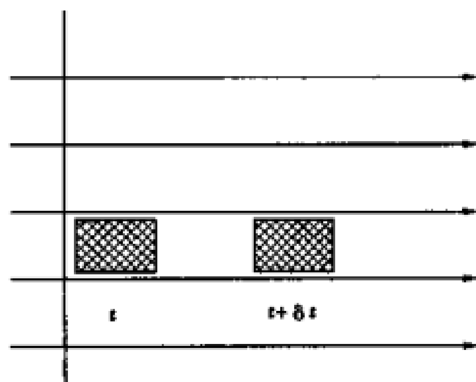


图 3.12　均匀流动

（2）旋转运动

流体微团作旋转运动时，微团类似刚体绕 A 点产生角位移。流体微团旋转运动的特点是形状和大小保持不变，方位（正交六面体对角线的方向）发生了偏移，如图 3.13 所示。表征流体微团作旋转运动的特征量是涡量 $\boldsymbol{\Omega}$。涡量是旋转角速度的 2 倍，即

$$\boldsymbol{\Omega} = 2\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\boldsymbol{u} \tag{3.5.1}$$

其中，旋转角速度 ω 是单位时间经过的角位移；rot$\boldsymbol{u}$ 是速度的旋度表达式。在图 3.11 中，按右手定则规定逆时针方向的转向为正，互相垂直的 AB 与 AD 边绕 A 点分别转过角度（角位移）$\delta\alpha$ 和 $\delta\beta$，则

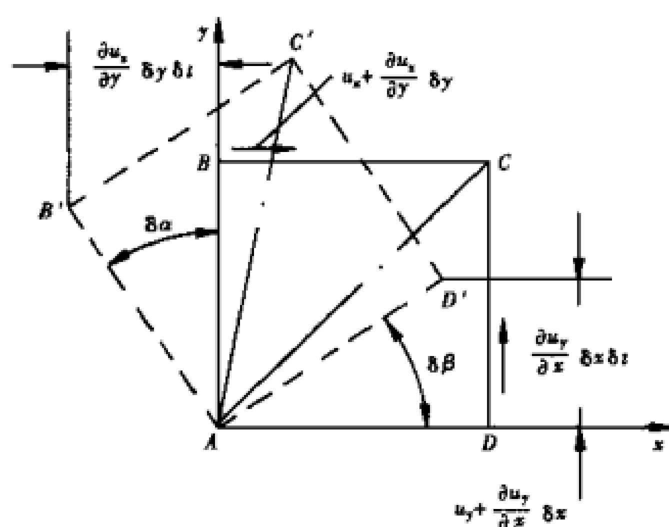


图 3.13　流体微团的旋转运动

$$\delta\alpha=\arctan\frac{-\frac{\partial u_x}{\partial y}\delta y\delta t}{\delta y}\approx -\frac{\partial u_x}{\partial y}\delta t \tag{3.5.2}$$

$$\delta\beta=\arctan\frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}\delta x\delta t}{\delta x}\approx \frac{\partial u_y}{\partial x}\delta t \tag{3.5.3}$$

对角线 AC 转过的角度 $\frac{\delta\alpha+\delta\beta}{2}$ 代表整个平面 $ABCD$ 转到平面 $AB_1C_1D_1$ 转过的角度。平面 $ABCD$ 的转动角速度为

$$\omega_z=\frac{1}{\delta t}\left(\frac{\delta\alpha+\delta\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\Omega_z \tag{3.5.4}$$

上式是流体微团绕 z 轴（过 A 点的坐标轴）的瞬时平均角速度；Ω_z 是涡量 Ω 在 z 轴方向的分量。类似地，可得

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}\Omega_x \tag{3.5.5}$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\Omega_y \tag{3.5.6}$$

如果流体像刚体一样作旋转运动，这种流动称为强制涡。

3.5.2　流体微团的变形体运动形式

(1)线变形

流体微团在运动过程中发生线变形，组成流体微团的各边会有伸长或缩短，但是各边的夹角保持不变。表征流体微团发生线变形的特征量是单位时间内各坐标轴方向长度的相对变化，即线变形速率（线变率）$\dot{\varepsilon}_{xx}$，$\dot{\varepsilon}_{yy}$，$\dot{\varepsilon}_{zz}$。图 3.14 中，平面 $ABCD$ 发生线变形后形状为平面 $AB_1C_1D_1$。x 方向上，流体质点线 AB 的速度为 u_x，CD 的速度为 $u_x+\frac{\partial u_x}{\partial x}\delta x$，经过 δt 后，CD 较 AB

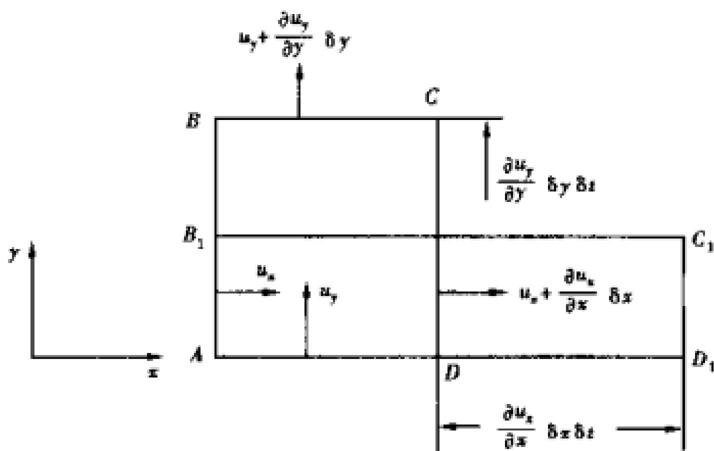


图 3.14　流体微团的线变形

的多移动了一段距离$\frac{\partial u_x}{\partial x}\delta x\delta t$，线变形速率为

$$\dot{\varepsilon}_{xx}=\frac{\frac{\partial u_x}{\partial x}\delta x\delta t}{\delta x\delta t}=\frac{\partial u_x}{\partial x} \tag{3.5.7}$$

类似地，在y方向的线变形速率为

$$\dot{\varepsilon}_{yy}=\frac{\frac{\partial u_y}{\partial y}\delta y\delta t}{\delta y\delta t}=\frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{3.5.8}$$

在z方向的线变形速率为

$$\dot{\varepsilon}_{zz}=\frac{\frac{\partial u_z}{\partial z}\delta z\delta t}{\delta z\delta t}=\frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{3.5.9}$$

由以上分析可知，线变形是由平行于运动方向的速度梯度引起的。

（2）角变形

流体微团在运动过程中发生角变形，流体微团形状发生改变，各边的夹角有变化，但是对角线的方向保持不变。表征流体微团发生角变形的特征量是单位时间内角度的平均变化，即角变形速率（切变率）$\dot{\gamma}_{xy}$，$\dot{\gamma}_{yz}$，$\dot{\gamma}_{zx}$。图3.15中，矩形平面$ABCD$发生线变形后形状为菱形平面$AB_1C_1D_1$，AD的速度为u_x，BC的速度为$u_x+\frac{\partial u_x}{\partial y}\delta y$，经过$\delta t$后，$AB$转过角度$\delta\alpha$到$AB_1$，距离$BB_1$等于$\frac{\partial u_x}{\partial y}\delta y\delta t$。按右手定则规定逆时针方向的转向为正，转角$\delta\alpha$为

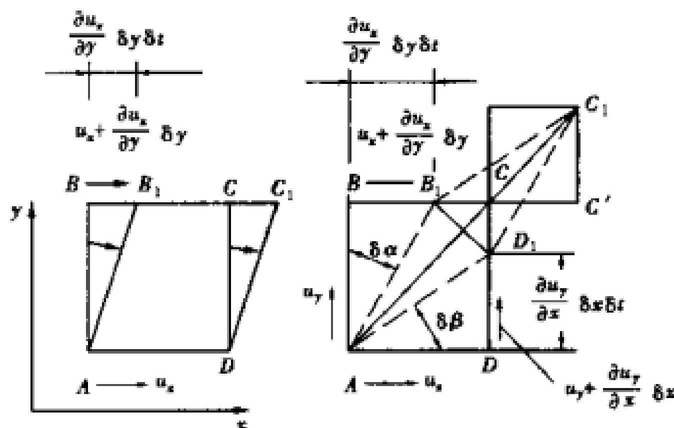


图3.15　流体微团的角变形

$$\delta\alpha=-\arctan\frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}\delta y\delta t}{\delta y}\approx-\frac{\partial u_x}{\partial y}\delta t \tag{3.5.10}$$

AD转过角度$\delta\beta$到AD_1，距离DD_1等于$\frac{\partial u_y}{\partial x}\delta x\delta t$，转角$\delta\beta$为

$$\delta\beta=\arctan=\frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}\delta x\delta t}{\delta x}\approx\frac{\partial u_y}{\partial x}\delta t \tag{3.5.11}$$

互相垂直的AB与AD边经过δt后，总的夹角变化为（$\delta\beta-\delta\alpha$），xy平面内的角变形速率为

$$\gamma_{xy}=\frac{1}{\delta t}\left(\frac{-\delta\alpha+\delta\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tag{3.5.12}$$

类似地，yz平面和zx平面内的角变形速率分别为

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \tag{3.5.13}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \tag{3.5.14}$$

由以上分析可知，角变形是由垂直于运动方向的速度梯度引起的。如果没有发生旋转，由于角变形使新、旧对角线保持平行，必有 $-\delta\alpha = \delta\beta$。

3.6 静止流体中的压力分布

流体静力学是研究流体在外力作用下静止时的平衡问题。作用在流体上的外力主要是质量力和面力。流体处于静力平衡状态时，流体层之间没有相对运动，因此不考虑流体的粘性。流体处于静止状态时，由于不承受切应力，只有与作用面垂直的法向应力，因此静止流体中一点的应力状况非常简单。液体静力学研究不可压缩流体在外力作用下静止时的状态，目的是考察静止液体中的压力分布。气体静力学研究可压缩流体在外力作用下静止时的状态，目的是考察气体中各处的压力、密度和温度。

当流体静止时，流体质点速度 $\boldsymbol{u}=0$，应力张量 $P=-p\boldsymbol{I}$，其中 p 是流体静力学压力函数。如果流体不是处于等温、绝热情况下，其内能 E、密度 ρ 和温度 T 是相互耦合的。对于均值流体，密度 $\rho=$ 常数，与压力 p 和温度 T 无关。密度 ρ 只是压力 p 的函数，与温度 T 无关的流体，称为正压流体，表示为 $\rho=f(p)$。对于所谓正压流体，压力 p、密度 ρ 可以与温度 T 分开求解。

3.6.1 液体静力学规律

(1) 作用在液体上的外力

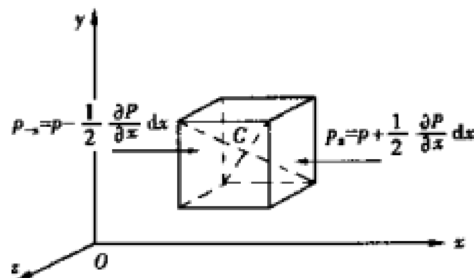


图 3.16 流体微元静力平衡

为了研究液体的静力学平衡规律的方便，可以在等温、绝热、均值流体中取一正交六面体微元来考察，各边与坐标轴 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴平行，如图 3.16 所示。流体微元中心坐标在直角坐标系 $Oxyz$ 中为 $C(x,y,z)$，微元边长分别为 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$。

设作用于单位质量流体的质量力为 $\boldsymbol{F}$，沿 x,y,z 方向的分量分别为 F_x，F_y 和 F_z，则作用在微元体上的质量力 $\rho\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 在 x 轴，y 轴，z 轴上的投影分别为

$$\begin{cases} X=\rho F_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ Y=\rho F_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ Z=\rho F_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \end{cases} \tag{3.6.1}$$

设流体微元中心 C 处的静压力为 p，沿 x 方向，作用在法线方向与 x 轴方向相同的微元体表面上的压力为 $p_x=p+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x$，其中，$p_x$ 的下标 x 表示压力 p_x 的作用面的法线方向与 x 轴方向相同；作用在法线方向与 x 轴方向相反的微元体表面上的压力为 $p_{-x}=p-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x$，其中，$p_{-x}$

的下标 $-x$ 表示压力 p_{-x} 的作用面的法线方向与 x 轴方向相反。于是，沿 x 方向的静压力为

$$p_{-x} - p_x = \left(p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\right) - \left(p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}dx \tag{3.6.2a}$$

流体微元静压力沿 y 和 z 方向有类似沿 x 方向的表达式，即

$$p_{-y} - p_y = \left(p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial y}dy\right) - \left(p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial y}dy\right) = -\frac{\partial p}{\partial y}dy \tag{3.6.2b}$$

$$p_{-z} - p_z = \left(p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}dz\right) - \left(p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = -\frac{\partial p}{\partial z}dz \tag{3.6.2c}$$

(2) 静力平衡微分方程

流体微元在外力作用下处于平衡状态，作用在微元体上的质量力和表面力之和必为零，即

$$\begin{cases} X + (p_{-x} - p_x)dydz = 0 \\ Y + (p_{-y} - p_y)dzdx = 0 \\ Z + (p_{-z} - p_z)dxdy = 0 \end{cases} \tag{3.6.3}$$

将作用在微元体上的质量力的表达式(3.6.1)和表面力的表达式(3.6.2)代入(3.6.3)式，整理后得到微元体的静力平衡微分方程

$$\begin{cases} F_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ F_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ F_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{3.6.4}$$

静力平衡微分方程(3.6.4)的矢量形式为

$$\boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p = 0 \tag{3.6.5}$$

静力平衡微分方程式表明了质量力和压力梯度之间的关系，是进行静力平衡计算时要用到的微分方程。

(3) 压力全微分

微元矢径 $d\boldsymbol{r}$ 为

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}dx + \boldsymbol{j}dy + \boldsymbol{k}dz$$

将静力平衡微分方程(3.6.5)式两端与微元矢径 $d\boldsymbol{r}$ 作数积，即

$$\left(\boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p\right)\cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{3.6.6}$$

根据梯度定理，有

$$dp = d\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{grad}p$$

即得压力全微分

$$\nabla p \cdot d\boldsymbol{r} = dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz \tag{3.6.7}$$

将上式代入(3.6.6)式，得到由质量力表示的压力全微分

$$dp = \rho(F_x dx + F_y dy + F_z dz) \tag{3.6.8}$$

已知质量力求静止流体中压力分布时，压力全微分(3.6.8)式是常用到的一般表达式。

(4)流体静力学基本方程

如果流体受到的质量力只是重力，于是单位质量流体的质量力 $\boldsymbol{F}$ 沿 x 轴，y 轴和 z 轴方向的分量分别为

$$F_x=0, F_y=0, F_z=-g$$

式中 z 轴方向分量的负号表示重力方向与 z 轴方向相反。将上式代入质量力表示的压力全微分表达式(3.6.8)，得

$$\mathrm{d}p+\rho g\mathrm{d}z=0 \tag{3.6.9}$$

对于不可压缩流体，密度与压力无关，积分上式，得

$$\frac{p}{\rho}+gz=C \tag{3.6.10}$$

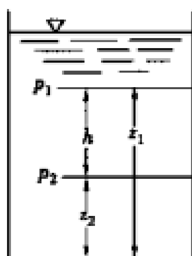


图 3.17 液体静压力分布

式中 p/ρ 是单位质量流体所具有的静压能，gz 是单位质量流体所具有的位能，C 是积分常数。(3.6.10)式表明，在重力场中处于平衡状态的不可压缩流体，其静压能和位能两者之和为常数，即对静止流体中任意两点 1 和 2 有

$$\frac{p_1}{\rho}+gz_1=\frac{p_2}{\rho}+gz_2 \tag{3.6.11}$$

或

$$p_2=p_1+\rho g(z_1-z_2)=p_1+\rho gh \tag{3.6.12}$$

上式称为流体静力学基本方程。流体静力学基本方程表明，处于重力场中的不可压缩流体，受到的静压力取决于垂直高度，与水平位置无关，如图 3.17 所示。

3.6.2 可压缩流体中的静压力分布

可压缩流体的密度不是常数。对于理想气体，其压力和密度之间的关系由状态方程来确定。对于等温、绝热、多变过程，压力和密度之间的关系为

$$\frac{p}{\rho^n}=k \tag{3.6.13}$$

式中 k 为常数。将上式代入(3.6.9)式，得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=-\rho g=-g\left(\frac{p}{k}\right)^{\frac{1}{n}}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}p}{p^{\frac{1}{n}}}=-\frac{g\mathrm{d}z}{k^{\frac{1}{n}}}$$

积分上式，得

$$\frac{n}{n-1}p^{1-\frac{1}{n}}=-\frac{g}{k^{\frac{1}{n}}}z+C \tag{3.6.14}$$

其中 C 是积分常数。当 $z=0, p=p_0, \rho=\rho_0$ 时，可求得

$$C=\frac{n}{n-1}p_0^{1-\frac{1}{n}}, k=\frac{p}{\rho^n}=\frac{p_0}{\rho_0^n}$$

将上面积分常数 C 和常数 k 的表达式代入(3.6.14)式，得

$$\frac{n}{n-1}p^{1-\frac{1}{n}} = -\frac{gz}{p_0^{1/n}/\rho_0} + \frac{n}{n-1}p_0^{1-\frac{1}{n}}$$

整理上式，得

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 - \frac{\rho_0 gz}{p_0}\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]^{\frac{n}{n-1}} \tag{3.6.15}$$

当 z 很小时，展开(3.6.15)式，去掉高阶小量，保留一阶小量 z，可得

$$\frac{p}{p_0} = 1 - \frac{\rho_0 gz}{p_0}$$

或

$$p = p_0 - \rho_0 gz \tag{3.6.16}$$

上式与不可压缩流体静力学基本方程(3.6.12)形式一样。当高度差很小时，气体密度近似不变。当压力变化不大时，可近似认为气体密度的平均值为常数。

3.6.3　静止流体的外力限制条件

(1)外力限制条件

当流体静止时，外力必须满足一定的条件，即外力限制条件。也就是说，流体只有满足外力限制条件，才可能保持静力平衡。

对(3.6.5)式两边取旋度，得

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = -\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho \times \nabla p + \frac{1}{\rho}\nabla \times \nabla p \tag{3.6.17}$$

根据场论公式，可知梯度函数的旋度值为零，于是上式右边第二项等于零。将(3.6.17)式与(3.6.5)式两边分别作数积，得

$$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = -\frac{1}{\rho^3}\nabla p\cdot(\nabla\rho \times \nabla p) \tag{3.6.18}$$

因为 ∇p 与 $\nabla\rho\times\nabla p$ 是两个正交的矢量，二者的数积等于零，于是，由(3.6.18)式得到

$$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = 0 \tag{3.6.19}$$

上式是流体保持静止状态的外力限制条件。

如果外力有势，即 $\boldsymbol{F} = -\nabla\tilde{V}$，其中 $\tilde{V}$ 是力势函数，则有势外力的旋度必为零

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = -\nabla\times\nabla\tilde{V} = 0$$

因此，有势外力满足外力限制条件(3.6.19)式，说明流体在有势外力场中有势外力作用下，可能保持静力平衡。在重力场中，重力和重力势为

$$\boldsymbol{F} = -\nabla(gz),\ \tilde{V} = gz$$

在引力场中，引力和引力势为

$$\boldsymbol{F} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right),\ \tilde{V} = \frac{1}{r}$$

显然，在重力场或引力场中，流体有可能处于静止状态。

(2)等压面

如果静止流体有自由面，则在自由面上应满足下面的条件

$$p = p_0 \tag{3.6.20}$$

其中 p_0 是给定的已知压力，例如大气压。上式说明自由面是等压面。静止流体的等压面形状不能任意选取。静力平衡微分方程式(3.6.5)表明，等压面必定与外力 $\boldsymbol{F}$ 垂直。当外力 $\boldsymbol{F}$ 有势时，等压面和等势面重合。

在等势面上，压力、密度和温度都等于常数。因此，等势面同时也是等压面、等密度面和等温度面。事实上，将有势外力 $\boldsymbol{F} = -\nabla \tilde{V}$ 代入(3.6.5)式，有

$$-\rho \nabla \tilde{V} = \nabla p \tag{3.6.21}$$

两边取旋度，得

$$\nabla \rho \times \nabla \tilde{V} = 0 \tag{3.6.22}$$

由(3.6.21)式可得

$$\nabla p \times \nabla \tilde{V} = 0 \tag{3.6.23}$$

(3.6.22)式和(3.6.23)式表明，等势面与等密度面重合，等势面与等压面重合。由状态方程可以推断，等势面与等温度面也重合。

自由面上 $p = p_0$，因此自由面是等压面，根据(3.6.23)式自由面也是等势面。自由面的形状由力势函数 $\tilde{V}$ = 常数来确定。当外力是重力时，力势函数为 $\tilde{V} = gz$，自由面的形状为 z = 常数。可见流体在重力场中处于静止状态时，其自由面是水平面。

3.6.4 旋转圆筒中液体的静压力分布

有一盛液圆筒，绕对称轴线 z 以等角速度 ω 旋转，圆筒中的液体随圆筒等角速度 ω 旋转，与旋转圆筒处于相对静止状态，如图3.18所示。选取直角坐标系 (x,y,z) 固结在旋转圆筒上，z 轴铅直向上，原点 O 取在自由液面与轴线 z 的交点上。质量为 m 的流体微团同时受到重力和离心力的作用。流体微团 m 离原点 O 距离为 z，距离 z 轴为 r，受到的离心力大小为

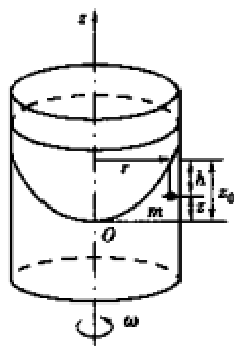


图3.18 旋转盛液圆筒

$$R = mr\omega^2$$

离心力在 x 轴、y 轴和 z 轴方向上的投影分别为

$$R_x = mr\omega^2\cos(r,x) = mx\omega^2$$

$$R_y = mr\omega^2\cos(r,y) = my\omega^2$$

$$R_z = mr\omega^2\cos(r,z) = mz\omega^2$$

单位质量流体受到的质量力 $\boldsymbol{F}$ 沿 x 轴、y 轴和 z 轴方向的分量分别为

$$F_x = \omega^2 x, F_y = \omega^2 y, F_z = -g$$

将上式代入压力全微分表达式(3.6.8)式

$$\mathrm{d}p = \rho(\omega^2 x\mathrm{d}x + \omega^2 y\mathrm{d}y - g\mathrm{d}z) \tag{3.6.24}$$

积分上式，得

$$p = \rho\left(\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz\right) + C = \rho\left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz\right) + C$$

自由表面的压力 $p = p_0$，根据旋转液体自由表面最低点处的边界条件 $r = 0, z = 0$，可求出积分常

数 $C=p_0$，于是由上式得到等角速度旋转圆筒中液体的压力分布表达式

$$p = p_0 + \rho g\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z\right) \tag{3.6.25}$$

等角速度旋转圆筒中，液体压力相等的层面称为等压面。等压面上的压力为常数，即 $dp=0$，于是压力全微分成为

$$\omega^2 x\mathrm{d}x + \omega^2 y\mathrm{d}y - g\mathrm{d}z = 0$$

积分上式，得

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = C$$

上式表示一簇等压面方程。在自由表面上

$$r = 0, z = 0$$

求出积分常数 $C=0$。设在自由表面上，旋转半径为 r 的流体微团与自由表面最低点的垂直距离为 z_0，将等压面方程中的 z 换为 z_0，即得自由表面方程

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz_0 = 0 \tag{3.6.26}$$

由上式求得

$$z_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

代入(3.6.26)式，得

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z) = p_0 + \rho gh \tag{3.6.27}$$

其中 h 是流体微团至自由表面的垂直距离。(3.6.27)式表明，与自由表面的垂直距离相等的流体质点层上压力相等，这类流体质点组成的层面是等压面。

3.6.5　帕斯卡定理

如果以液体自由面作为位置基准，即选择 $z_1=0$，压力 $p_1=p_0$，则距离自由面深度为 h 的任一位置 $z_2=-h$ 处，压力 $p_2=p$，流体静力学基本方程(3.6.12)可以改写为

$$p = p_1 + \rho g(z_1 - z_2) = p_0 + \rho gh \tag{3.6.28}$$

上式表明，液体在深度为 h 的压力 p 等于自由面上的压力 p_0与高为 1 的液柱重量之和。

对(3.6.28)式两边作微分运算，得

$$\delta p = \delta p_0 \tag{3.6.29}$$

上式称为帕斯卡定理。帕斯卡定理指出，自由面上的压力 p_0有 δp_0的改变，δp_0的压力变化瞬间将传递至静止流体中各点，使静止流体中各点压力也发生 δp_0的改变。

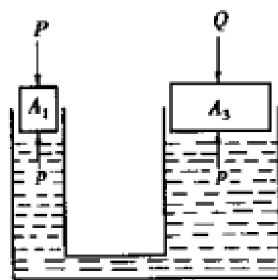


图 3.19　水压机工作原理

水压机能用较小的力将较大的物体托起来，其工作原理就是依据的帕斯卡定理。水压机示意图如图 3.19 所示。两个互相连通的水槽的截面积分别为 A_1和 A_2。若在 A_1面的活塞上加一力 P，活塞单位面积的压力则为 $p=P/A_1$。根据帕斯卡定理，压力 p 瞬间传递至静止流体中各点，截面 A_2各点受到的压力也为 p。截面 A_2上受到的总压力为

$$Q = pA_2 = P\frac{A_2}{A_1} \tag{3.6.30}$$

可见，截面 A_2 上受到的力 Q 是 A_1 上受到的力 P 的 A_2/A_1 倍。

3.6.6 阿基米德原理

物体 A 全部沉没入液体中，将受到浮力和浮力矩的作用。设物体 A 的体积为 τ，表面为 S，$\boldsymbol{n}$ 是 S 面外法线单位矢量，如图 3.20 所示。

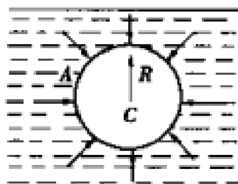


图 3.20 物体受到的浮力

物体 A 受到的总压力 $\boldsymbol{R}$ 为

$$\boldsymbol{R} = -\int_S p\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = -\int_\tau \nabla p\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{k}\int_\tau \rho g\mathrm{d}\tau = \rho g\tau\boldsymbol{k} = W\boldsymbol{k} \tag{3.6.31}$$

其中 $W=\rho g\tau$ 是被物体 A 排挤出来的液体重量。

压力梯度 $\nabla p = -\rho g\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{k}$ 是 z 轴方向的单位矢量，z 轴方向铅垂向上，原点在液体自由面上。(3.6.31)式说明，物体 A 受到的浮力，其大小等于物体 A 排挤出来的液体重量，方向沿 z 轴铅垂向上。

物体 A 受到的浮力矩 $\boldsymbol{L}$ 为

$$\boldsymbol{L} = -\int_S \boldsymbol{r}\times p\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int_S \boldsymbol{n}\times p\boldsymbol{r}\mathrm{d}S = \int_\tau \nabla\times(p\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau = \int_\tau \nabla p\times\boldsymbol{r}\mathrm{d}\tau =$$

$$-\rho g\int_\tau \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}\mathrm{d}\tau = \left(\frac{1}{\tau}\int_\tau \boldsymbol{r}\mathrm{d}\tau\right)\times W\boldsymbol{k} = \boldsymbol{r}_C\times W\boldsymbol{k} = \boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{R} \tag{3.6.32}$$

其中 $\boldsymbol{r}_C=\frac{1}{\tau}\int_\tau \boldsymbol{r}\mathrm{d}\tau$ 是被物体 A 排挤出液体重心的矢径。在推导(3.6.32)式的过程中，已经考虑到 $\nabla\times\boldsymbol{r}=0$ 和压力梯度 $\nabla p=-\rho g\boldsymbol{k}$。

设浮力作用点的矢径为 $\boldsymbol{r}$，则矢径 $\boldsymbol{r}$ 与总压力 $\boldsymbol{R}$ 的矢积为浮力矩 $\boldsymbol{L}$

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{R} \tag{3.6.33}$$

因为总压力 $\boldsymbol{R}$ 与浮力矩 $\boldsymbol{L}$ 不共面，即

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{R}) = 0$$

上式说明没有力偶存在，整个作用力可以简化为一个单力。比较(3.6.33)式和(3.6.32)式得

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_C$$

可见这个单力通过物体 A 排挤出液体重心 C。通过以上讨论，得到阿基米德原理：

沉没于水中的物体，所受到的浮力大小等于被物体排挤出液体的重量，方向是重力的负方向，浮力作用线通过被物体排挤出的液体重心。

利用阿基米德原理可以研究浮体的平衡问题。

3.6.7 压力表示方法

应用静力学原理是测量流体中静压力的基本方法。流体静力学基本方程(3.6.12)可以写成

$$g(z_2 - z_1) + \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) = 0 \tag{3.6.34}$$

式中$(z_2 - z_1)$是位置差，$(p_2 - p_1)$是压力差。为了方便，位置和静压力都可以任意选择一个基准作为度量的起点。

(1) 压力基准

通常选择绝对真空或大气压p_a作为压力基准。以绝对真空作为压力基准测得的压力称为绝对压力p_{ab}。绝对压力p_{ab}低于大气压p_a的值称为真空度p_{vac}。以大气压p_a作为压力基准测得的压力称为表压p_m。表压p_m是绝对压力p_{ab}与大气压p_a的差值，又称为相对压力。表压p_m可表示为

$$p_m = p_{ab} - p_a \tag{3.6.35}$$

图 3.21 表示了绝对压力p_{ab}、表压p_m和真空度p_{vac}之间的关系。图中位置 1－1 处的压力可以表示为绝对压力p_{ab}和表压p_m；图中位置 2－2 处的压力可以表示绝对压力p_{ab}和真空度p_{vac}。



图 3.21　绝对压力、表压和真空度

对于不可压缩流体，可以任意选择压力基准。但是，对于压力变化比较大的可压缩流体，按(3.6.9)式进行计算。

(2) 压力单位

常用压力单位有三种：

1) 以压力定义的压力单位 N/m^2，称为帕斯卡(Pa)，10^5帕斯卡称为巴(bar)；

2) 以液柱高度表示的压力单位，称为压头，如 m 水柱或 mm 汞柱；

3) 以大气压(atm)作为计量单位。

三种压力单位之间的换算关系为：

$$1\text{atm}(\text{标准大气压}) = 1.013\text{bar} = 1.013\times10^5\text{Pa} = 760\text{mmHg} = 10.33\text{mH}_2\text{O}$$

(3) 国际标准大气

大气中的压力、密度和温度随高度的变化规律，要受到不同经纬度、季节和气候等因素的影响。为了对实验和计算结果进行对比交流，按下面的约定规定了国际标准大气。

国际标准大气取海平面为基准平面$(z=0)$。基准平面上的物理量为：

$$t_0 = 15℃\,(T_0 = 288\text{K}),\ p_0 = 10330\text{kg/m}^2$$

$$\rho_0 = 0.125\text{kg}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4\,(\gamma_0 = 1.225\text{kg/m}^3)$$

习　　题

3.1　试写出不可压缩流体在欧拉观点和拉格朗日观点下的数学表达式。

3.2　用欧拉观点写出下面的数学表达式：

(1) 均质流体的密度；(2) 不可压缩均质流体的密度；(3) 定常运动流体的密度。

3.3　如果速度 $\boldsymbol{u}\neq0$，试说明下面各式的物理意义：

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = 0,\ \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} = 0,\ (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = 0$$

3.4　判断下列情况中的流体质点线是否是流线？是否是轨迹？是否既是流线又是轨迹？是否既不是流线又不是轨迹？

(1)庆典礼炮在天空放射的烟花划过的线;

(2)烟囱里冒出的烟;

(3)集会结束后从会议厅门口离去的短暂时间内连成不同曲线形状的人流;

(4)在大街上排成长列行驶的礼宾车辆。

3.5　对下列不同的速度分布的流动,试绘出其流线簇:

(1)$u_x=\frac{cx}{x^2+y^2}$,　$u_y=\frac{cy}{x^2+y^2}$,　$u_z=0$,其中 c 是常数;

(2)$u_x=\frac{cy}{x^2+y^2}$,　$u_y=\frac{cx}{x^2+y^2}$,　$u_z=0$,其中 c 是常数;

(3)$u_r=\frac{\cos\theta}{r^2}$,　$u_\theta=\frac{\sin\theta}{r^2}$,　$u_z=0$;

(4)$u_r=\frac{2k\cos\theta}{r^3}$,　$u_\theta=\frac{k\sin\theta}{r^3}$,　$u_\varphi=0$,其中 k 是常数。

(答案:(1)$y=Ax,z=B$,其中 A,B 为常数;(2)$x^2+y^2=$ 常数;(3)柱坐标系中,$r=c_1\sin\theta,z=c_2$,其中 c_1,c_2为常数;(4)球坐标系中,$r=c_1\sin^2\theta,\varphi=c_2$,其中 c_1,c_2为常数)

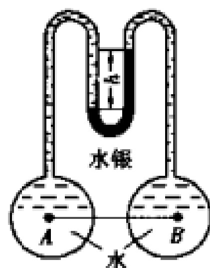
3.6　已知流体流动的速度分布为

$$u_x=x^2-y^2,u_y=-2xy$$

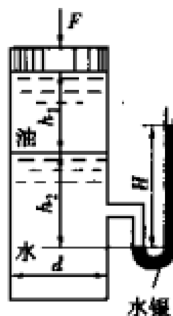
求通过 $x=1,y=1$ 的一条流线。(答案:$y^3-3x^2y+2=0$)

3.7　设 $u_x=x+t,u_y=-y+t,u_z=0$,求通过 $x=-1,y=-1$ 的流线及 $t=0$ 时通过 $x=-1,y=-1$ 的迹线。(答案:$x+y+2=0,z=$常数)

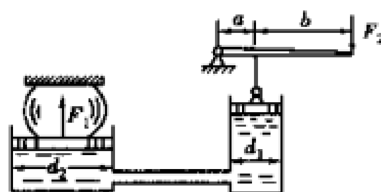
3.8　如图所示,U 形管压差计水银面高度差 $h=15\text{cm}$。求充满水的 A、B 两容器内的压强差。(答案:18 533Pa)



题 3.8 附图



题 3.9 附图



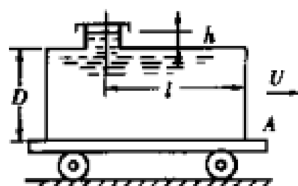
题 3.10 附图

3.9　在盛有油和水的圆柱形容器的盖上加载荷 $F=5\ 788\text{N}$,已知 $h_1=30\text{cm},h_2=50\text{cm},d=0.4\text{m}$,油的密度为 $\rho_{oi}=800\text{kg/m}^3$,$\rho_{Hg}=13\ 600\text{kg/m}^3$,求 U 形管中水银柱的高度差 H。(答案:0.4m)

3.10　处于平衡状态的水压机,其大活塞上受力 $F_1=4\ 905\text{N}$,杠杆柄上作用力 $F_2=147\text{N}$,杠杆臂 $a=15\text{cm},b=75\text{cm}$。若小活塞直径 $d_1=5\text{cm}$,摩擦力的校正系数 $\eta=0.9$,不计活塞的高度差及其质量,求大活塞直径 d_2。(答案:$d_2=12.43\text{cm}$)

3.11　油罐车内装有密度 $\rho=1\ 000\text{kg/m}^3$的液体,以水平直线速度 $U=35\text{km/h}$ 行驶,油罐车的尺寸为 $D=2\text{m},h=0.3\text{m},l=4\text{m}$。自某一时刻起油罐车减速行驶,经过 100m 后完全停止下来。若制动是均匀的,求作用在侧面 A 上的力 F。(答案:$F=46\ 308\text{N}$)

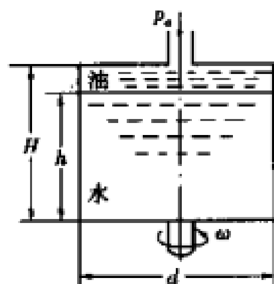
3.12　圆柱形容器的直径 $d=600\text{mm}$，高 $H=500\text{mm}$，水面至底板高度 $h=400\text{mm}$，余下的容器空间盛满密度为 $\rho=800\text{kg/m}^3$ 的油，容器顶盖中心开有一小孔与大气相通。若容器绕其主轴旋转，问当转速 n 多大时油面与底面接触？求此时顶盖和底板上的最大和最小计示压强（提示：油水分界面为等压面）。（答案：$n=157\text{r/min}$；顶盖上 $p_{max}=11\ 270\text{Pa}$，$p_{min}=0$；底板上 $p_{max}=16\ 173\text{Pa}$，$p_{min}=3\ 922\text{Pa}$）



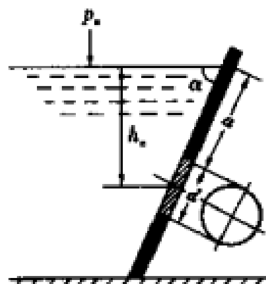
题 3.11 附图

3.13　求斜壁上圆形闸门的总压力 R 及压力中心 r_c。已知道闸门直径 $d=0.5\text{m}$，$a=1\text{m}$，$\alpha=60℃$。（答案：$R=2\ 083\text{N}$；$r_c=1.263\text{m}$）

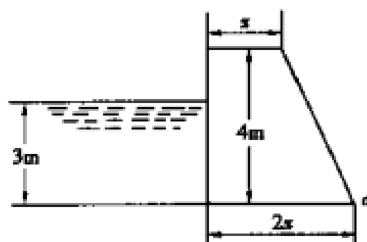
3.14　图示水泥水坝与图面垂直，长为 30m，坝高 4m，坝内蓄水深度 3m。筑坝水泥材料每立方米重 2 吨，如果坝的重量为水对坝的水平作用力的 10 倍，为使坝在经过 o 点边线的倾覆力矩作用下是稳定的，求坝顶最小宽度 x。（答案：$x=3.8\text{m}$）



题 3.12 附图



题 3.13 附图



题 3.14 附图

第 4 章

流体力学基本方程组

质量守恒定律、动量定理、能量守恒定律、热力学定律以及流体的物性，反映了流体运动的内在规律，它们在流体力学中有独特的表达形式，组成制约流体运动的基本方程。

4.1　物质积分的随体导数

流体质点具有速度、动量、能量等物理属性，在流体质点上便定义了描述流体流动的物理量。流场中由流体质点组成连续的物质线、物质面和物质体，其位置和形状随时间变化而不同，定义在上面的物理量也随时间不断改变。刻画这种改变量的是物质线、物质面和物质体等积分的随体导数。在建立流体力学基本方程组的时候，常常要用到这些随体导数。本节将介绍流体质点组成的物质线、物质面和物质体等积分的随体导数表达形式。

4.1.1　线段元、体积元和面积元的随体导数

(1)线段元的随体导数

在流场中任取一线段元 $\delta \boldsymbol{r}$，它是矢径 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_0$ 之差，即

$$\delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 \tag{4.1.1}$$

线段元 $\delta \boldsymbol{r}$ 的随体导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta \boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0 = \delta \boldsymbol{u} \tag{4.1.2}$$

上式表明，线段元的随体导数是同一时刻流场中两点速度之差，式中随体导数符号和微分符号可以互相交换。根据梯度定理，速度分量的微分可以表示为

$$\delta u_x = \delta \boldsymbol{r} \cdot \nabla u_x, \quad \delta u_y = \delta \boldsymbol{r} \cdot \nabla u_y, \quad \delta u_z = \delta \boldsymbol{r} \cdot \nabla u_z$$

合起来写成

$$\delta \boldsymbol{u} = \delta \boldsymbol{r} \cdot \nabla \boldsymbol{u} \tag{4.1.3}$$

于是，线段元 $\delta \boldsymbol{r}$ 的随体导数可表示为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta \boldsymbol{r} = \delta \boldsymbol{r} \cdot \nabla \boldsymbol{u} \tag{4.1.4}$$

由上式可知，线段元 $\delta\boldsymbol{r}$ 的随体导数是线段元与速度梯度的点积。

(2)体积元的随体导数

体积元 $\delta\tau$ 的随体导数是体积元的变化率，它等于通过封闭曲面 S 的速度通量，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\tau = \oint_S u_n \mathrm{d}S$$

式中 u_n 是速度在封闭曲面 S 外法线方向的投影。根据矢量散度的定义，速度散度的定义为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \lim_{\delta\tau\to 0}\frac{\oint_S u_n \mathrm{d}S}{\delta\tau}$$

考虑到速度通量等于体积元 $\delta\tau$ 的变化率，速度散度的定义式可写为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \frac{1}{\delta\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\tau \tag{4.1.5}$$

上式表明，速度散度是相对体积膨胀率。由上式可得体积元的随体导数：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\tau = \mathrm{div}\boldsymbol{u}\delta\tau = \nabla\cdot\boldsymbol{u}\delta\tau \tag{4.1.6}$$

由上式可知，体积元 $\delta\tau$ 的随体导数是体积元与速度散度的乘积。

(3)面积元的随体导数

推导面积元 $\delta\boldsymbol{S}$ 的随体导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\boldsymbol{S}$ 的表达式，是在线段元随体导数(4.1.4)式和体积元随体导数(4.1.6)式基础上进行的。在流场中任取一母线不与截面垂直的微元柱体，微元截面积为 $\delta\boldsymbol{S}$，母线为 $\delta\boldsymbol{r}$，柱体微元体积则为

$$\delta\tau = \delta\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{S}$$

对上式两边取随体导数，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\tau = \frac{\mathrm{d}\delta\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{S} + \delta\boldsymbol{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t}$$

将线段元随体导数(4.1.4)式、体积元随体导数(4.1.6)式和柱体体积的表达式代入上式，得

$$(\delta\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{u})\cdot\delta\boldsymbol{S} + \delta\boldsymbol{r}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\boldsymbol{S} - \nabla\cdot\boldsymbol{u}(\delta\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{S}) = 0$$

将上式整理为

$$\delta\boldsymbol{r}\cdot\left(\nabla\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{S} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\boldsymbol{S} - \nabla\cdot\boldsymbol{u}\delta\boldsymbol{S}\right) = 0$$

由于线段元 $\delta\boldsymbol{r}$ 是任取的，于是得到面积元 $\delta\boldsymbol{S}$ 的随体导数表达式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\boldsymbol{S} = \nabla\cdot\boldsymbol{u}\delta\boldsymbol{S} - \nabla\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{S} \tag{4.1.7}$$

由上式可知，面积元 $\delta\boldsymbol{S}$ 的随体导数等于速度散度与面积元的乘积减去速度梯度与面积元的点积。(4.1.7)式的张量表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta S_i = \delta S_i\frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \delta S_j\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \tag{4.1.8}$$

4.1.2　线积分、面积分和体积分的随体导数

(1)线积分的随体导数

速度矢量 $\boldsymbol{u}$ 沿流体质点组成的封闭曲线 L 的线积分的随体导数，一部分是由速度随时间

变化而改变引起的，另一部分是由封闭曲线 L 在流动过程中改变形状引起的，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_L \boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{r} = \oint_L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{r}) = \oint_L \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{r} + \oint_L \boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\boldsymbol{r} = \oint_L \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{r} + \oint_L \boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{u} = \oint_L \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{r} + \oint_L \delta\frac{U^2}{2} = \oint_L \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{r} \tag{4.1.9}$$

式中 $\oint_L \delta\frac{U^2}{2} = 0$，是因为速度是单值函数。

(2)流体面积分的随体导数

类似速度矢量 $\boldsymbol{u}$ 沿流体质点组成的封闭曲线 L 的线积分的随体导数的推导，涡旋矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 面积分的随体导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_S \boldsymbol{\Omega}\cdot\delta\boldsymbol{S} = \oint_S \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{S} + \oint_S \boldsymbol{\Omega}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t} = \oint_S \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\boldsymbol{S} + \oint_S (\mathrm{div}\boldsymbol{u})\boldsymbol{\Omega}\cdot\delta\boldsymbol{S} - \oint_S ((\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u})\cdot\delta\boldsymbol{S} = \oint_S \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\Omega}\mathrm{div}\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right)\cdot\delta\boldsymbol{S} \tag{4.1.10}$$

(3)流体体积分的随体导数

对于任一标量函数 φ 的体积分的随体导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\tau \varphi\delta\tau = \int_\tau \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\delta\tau + \int_\tau \varphi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\tau = \int_\tau \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \varphi\mathrm{div}\boldsymbol{u}\right)\delta\tau \tag{4.1.11}$$

考虑到标量函数 φ 的随体导数形式，式中被积函数可写为

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \varphi\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi + \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{u})$$

应用奥高定理，标量函数 φ 的体积分的随体导数便成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\tau \varphi\delta\tau = \int_\tau \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{u})\right]\delta\tau = \int_\tau \frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta\tau + \int_S \varphi u_n\delta S \tag{4.1.12}$$

对于任一矢量函数 $\boldsymbol{a}$ 的体积分的随体导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\tau \boldsymbol{a}\delta\tau = \int_\tau \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{a}\mathrm{div}\boldsymbol{u}\right)\delta\tau \tag{4.1.13}$$

式中被积函数为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{a}\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\nabla\cdot\boldsymbol{u}$$

利用张量表示，容易证明

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\nabla\cdot\boldsymbol{u} = v_i\frac{\partial a_j}{\partial x_i} + a_j\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial(v_i a_j)}{\partial x_i} = \nabla\cdot(\boldsymbol{u}\boldsymbol{a})$$

将上式代入(4.1.13)式中右端的被积函数，应用奥高定理，即得矢量函数 $\boldsymbol{a}$ 的体积分的随体导数另一形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\tau \boldsymbol{a}\delta\tau = \int_\tau \left(\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial t} + \nabla\cdot(\boldsymbol{u}\boldsymbol{a})\right)\delta\tau = \int_\tau \frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial t}\delta\tau + \int_S v_n\boldsymbol{a}\delta S \tag{4.1.14}$$

4.2　连续性方程

4.2.1　质量守恒定律

在流体中，由一定流体质点组成体积为 τ 的物质体，若流体微元体积 $\delta\tau$ 的密度为 ρ，则其质量为

$$m = \int_\tau \rho \delta\tau \tag{4.2.1}$$

根据质量守恒定律，任一时刻流体的质量在运动过程中不生不灭，于是质量守恒定律可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\tau \rho \delta\tau = 0 \tag{4.2.2}$$

我们从质量守恒定律表达式(4.2.2)出发，推导流体的连续性方程。

4.2.2　积分形式的连续性方程

(1)积分形式的连续性方程

质量守恒定律(4.2.2)式是密度函数 ρ 的体积分的随体导数，根据(4.1.12)式可以写为

$$\int_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}\delta\tau + \int_\tau \rho v_n \delta S = 0 \tag{4.2.3}$$

上式是积分形式的连续性方程。

(2)控制体和控制面

利用积分形式的方程确定流体量时，需要考察控制体积内流体量的变化。所谓控制体积，是由流场空间点组成的有限体积 τ，它是根据流体流动问题选定的流场空间范围，其体积固定在空间中不随时间改变。控制体积的表面 S 称为控制面，通常取控制面的外法线的方向为法线的正方向，$\boldsymbol{n}$ 为外法线的单位矢量。规定通过控制面 S 沿外法线流出的流体量为正值，或沿外法线相反方向流进控制面 S 的流体量为负值，如图4.1所示。

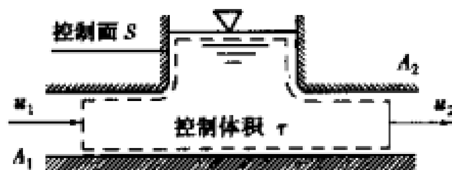


图4.1　控制体和控制面

(3)连续性方程的物理意义

积分形式的连续性方程的物理意义，可以利用控制体积来说明。事实上，(4.2.3)式左边第一项的负值 $-\int_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}\delta\tau$，是由于密度场的不定常性，引起单位时间内体积 τ 内流体质量减少的数量；方程左边第二项 $\int_S \rho v_n \delta S$，表示通过控制面 S 单位时间内流出或流进的流体总和，正号表示通过控制面 S 沿外法线流出的流体质量。根据质量守恒定律，两项代数和为零，于是得到积分形式的连续性方程。

4.2.3 微分形式的连续性方程

(1)微分形式的连续性方程

假定被积函数连续,体积 τ 是任意选取的,由(4.1.11)式推出被积函数必须等于零,于是得到微分形式的连续性方程

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho \mathrm{div}\boldsymbol{u}=0 \tag{4.2.4}$$

及

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u})=0 \tag{4.2.5}$$



图 4.2 流管

微分形式连续性方程的物理意义是:为了满足体积 τ 内质量守恒,方程中相对密度变化率 $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$ 等于相对体积变化率的负值 $-\mathrm{div}\boldsymbol{u}$。

(2)直角坐标形式的连续性方程

在直角坐标系中连续性方程(4.2.5)式采取下列形式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=0 \tag{4.2.6}$$

(3)定常运动的连续性方程

对于定常运动的流体,$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$,连续性方程(4.2.6)式变成

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=0 \tag{4.2.7}$$

上式表明定常运动时单位体积流进和流出的质量相等。

(4)不可压缩流体的连续性方程

流体不可压缩时,$\frac{d\rho}{dt}=0$,由(4.2.7)式得不可压缩流体的连续性方程

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \tag{4.2.8}$$

上式表明不可压缩流体的速度场是无源场,流体微团的密度、质量在随体运动中都不变。

(5)流管中平均运动的连续性方程

在流体中取一流管(图 4.2),设其中两个横截面积为 A_1 和 A_2,平均速度为 U_1,U_2,平均密度为 ρ_1,ρ_2。根据质量守恒定理,对于定常流动,流过流管中任何两个截面的流体质量相等,即

$$\rho_1U_1A_1=\rho_2U_2A_2 \tag{4.2.9}$$

或

$$\rho UA=常数 \tag{4.2.10}$$

式(4.2.10)表明在低速气流和水流中,流速与流管截面积成反比,截面积大的地方流速小,截面积小的地方流速大。

两个应用公式

由质量守恒定理,微元质量 $\delta m=\rho\delta\tau$ 的时间导数为零,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\delta\tau) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta m = 0$$

对于任一标量函数 φ 和任一矢量函数 $\boldsymbol{a}$，可以推导出的下面两个应用公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\tau \rho\varphi\delta\tau = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\tau \varphi\delta m = \int_\tau \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\delta m + \int_\tau \varphi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta m = \int_\tau \rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\delta\tau \tag{4.2.11}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\tau \rho\boldsymbol{a}\delta\tau = \int_\tau \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\delta\tau \tag{4.2.12}$$

4.3 运动方程

4.3.1 动量定理的表达式

流体的动量定理可以表述成在任取流体体积 τ 中，流体动量的变化率等于作用在该体积上的质量力和面力之和。动量定理的表达式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\tau \rho\boldsymbol{u}\delta\tau = \int_\tau \rho\boldsymbol{F}\delta\tau + \int_S \boldsymbol{p}_n\delta S \tag{4.3.1}$$

式中，$\boldsymbol{F}$ 表示作用在单位质量流体上的质量力分布函数；$\boldsymbol{p}_n$ 表示作用在流体边界单位面积上的面力分布函数。

4.3.2 积分形式的动量方程

根据(4.1.6)式和(4.1.14)式，(4.3.1)式中流体动量体积分的随体导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\tau \rho\boldsymbol{u}\delta\tau &= \int_\tau \frac{\mathrm{d}(\rho\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t}\delta\tau + \int_\tau \rho\boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\tau = \\ &\int_\tau \frac{\mathrm{d}(\rho\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t}\delta\tau + \int_\tau \rho\boldsymbol{u}\mathrm{div}\boldsymbol{u}\delta\tau = \int_\tau \frac{\partial(\rho\boldsymbol{u})}{\partial t}\delta\tau + \int_S \rho u_n\boldsymbol{u}\delta S\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

将上式代入动量定理的表达式(4.3.1)式，得到下面积分形式的动量方程

$$\int_\tau \frac{\partial(\rho\boldsymbol{u})}{\partial t}\delta\tau + \int_S \rho u_n\boldsymbol{u}\delta S = \int_\tau \rho\boldsymbol{F}\delta\tau + \int_S \boldsymbol{p}_n\delta S \tag{4.3.3}$$

4.3.3 微分形式的动量方程

(1)运动方程

运用拉格朗日观点，利用质量守恒定律，流体动量的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\tau \rho\boldsymbol{u}\delta\tau = \int_\tau \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\delta\tau$$

应用奥高公式有

$$\int_S p_n\delta S = \int_S \boldsymbol{n}\cdot P\delta S = \int_\tau \mathrm{div}P\delta\tau$$

式中 P 是应力张量。于是，动量定理的表达式(4.3.3)变为

$$\int_{\tau}\left(\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}-\rho\boldsymbol{F}-\mathrm{div}P\right)\delta\tau=0$$

假定上式中被积函数连续，由于体积 τ 是任意的，那么被积函数恒为零，即

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\rho\boldsymbol{F}+\mathrm{div}P \tag{4.3.4}$$

式中 $\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$ 是单位体积上的惯性力，$\rho\boldsymbol{F}$ 是单位体积上的质量力，$\mathrm{div}P$ 是单位体积上的应力张量的散度。(4.3.4)式是微分形式的动量方程，通常称为运动方程。

运动方程(4.3.4)式用张量表示为

$$\rho\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=\rho F_i+\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} \tag{4.3.5}$$

(2)直角坐标形式的运动方程

在直角坐标系中，运动方程(4.3.4)式的形式为

$$\begin{cases}\rho\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\dfrac{\partial u_x}{\partial z}\right)=\rho F_x+\dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial p_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial p_{xz}}{\partial z}\\ \rho\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right)=\rho F_y+\dfrac{\partial p_{yx}}{\partial x}+\dfrac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\dfrac{\partial p_{yz}}{\partial z}\\ \rho\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right)=\rho F_z+\dfrac{\partial p_{zx}}{\partial x}+\dfrac{\partial p_{zy}}{\partial y}+\dfrac{\partial p_{zz}}{\partial z}\end{cases} \tag{4.3.6}$$

(3)兰姆-葛罗米柯(Lamb-Громеко)运动方程

在速度的随体导数中，利用场论基本运算公式可以将变位加速度 $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ 写为

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\mathrm{grad}\frac{U^2}{2}+\mathrm{rot}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}$$

于是速度的随体导数变成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\mathrm{grad}\frac{U^2}{2}+\mathrm{rot}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}$$

将上式代入运动方程(4.3.4)式，得

$$\rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\mathrm{grad}\frac{U^2}{2}+\mathrm{rot}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}\right)=\rho\boldsymbol{F}+\mathrm{div}P \tag{4.3.7}$$

(4.3.7)式称为兰姆-葛罗米柯运动方程。在兰姆-葛罗米柯运动方程中，变位加速度分成了位势部分 $\mathrm{grad}\frac{U^2}{2}$ 和涡旋部分 $\mathrm{rot}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}$，这对于解决一些流体流动问题是方便的。

4.3.4 动量矩定理的表达式

在流体体积 τ 中，任取一点为力矩的参考点，$\boldsymbol{r}$ 为流体质点到该参考点的矢径。流体的动量矩定理可以表述成流体动量矩的变化率等于作用在该体积上的质量力和面力对同一参考点力矩之和。于是，动量矩定理的表达式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\tau}\boldsymbol{r}\times\rho\boldsymbol{u}\delta\tau=\int_{\tau}\boldsymbol{r}\times\rho\boldsymbol{F}\delta\tau+\int_{S}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_n\delta S \tag{4.3.8}$$

(1)积分形式的动量矩定理

流体动量矩体积分的随体导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\tau} \boldsymbol{r} \times \rho \boldsymbol{u} \delta\tau = \int_{\tau}\left[\boldsymbol{r} \times \frac{\partial(\rho \boldsymbol{u})}{\partial t}\right]\delta\tau + \int_{S}(\boldsymbol{r} \times \rho u_n \boldsymbol{u})\delta S$$

将上式代入动量矩定理的表达式(4.3.8)式中,得到下面积分形式的动量矩定理

$$\int_{\tau}\left[\boldsymbol{r} \times \frac{\partial(\rho \boldsymbol{u})}{\partial t}\right]\delta\tau + \int_{S}(\boldsymbol{r} \times \rho u_n \boldsymbol{u})\delta S = \int_{\tau}\boldsymbol{r} \times \rho \boldsymbol{F}\delta\tau + \int_{S}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_n \delta S \tag{4.3.9}$$

(2)微分形式的动量矩定理

微分形式的动量矩定理并不给出新的方程,只给出应力张量对称的已知结论。事实上,利用质量守恒定律,流体动量矩的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\tau} \boldsymbol{r} \times \rho \boldsymbol{u} \delta\tau = \int_{\tau}\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{u})\delta\tau = \int_{\tau}\left(\boldsymbol{r} \times \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\right)\delta\tau$$

面力对同一参考点的力矩用张量表示为

$$\begin{aligned}\int_{S}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_n \delta S &= \int_{S}\varepsilon_{ijk}x_j p_k \delta S = \int_{S}\varepsilon_{ijk}x_j p_{kl}n_l \delta S = \\ &\int_{\tau}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial(x_j p_{kl})}{\partial x_l}\delta\tau = \int_{\tau}\varepsilon_{ijk}\left(p_{kj} + x_j\frac{\partial p_{kl}}{\partial x_l}\right)\delta\tau = \\ &\int_{\tau}\varepsilon_{ijk}p_{kj}\delta\tau + \int_{\tau}(\boldsymbol{r} \times \mathrm{div}P)\delta\tau\end{aligned}$$

于是,动量矩定理的表达式(4.3.8)可以写为

$$\int_{\tau}\varepsilon_{ijk}p_{kj}\delta\tau = \int_{\tau}\left[\boldsymbol{r} \times \left(\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} - \rho\boldsymbol{F} - \mathrm{div}P\right)\right]\delta\tau$$

结合运动方程式(4.3.4),即得到微分形式的动量矩定理

$$\int_{\tau}\varepsilon_{ijk}p_{kj}\delta\tau = 0 \tag{4.3.10}$$

上式没有更多的含义,只是给出了应力张量对称这个已知结论,即

$$p_{kj} = p_{jk} \tag{4.3.11}$$

4.4 能量方程

自然界中存在的各种形式的能量都遵循能量守恒定律,即能量可以互相转换,但是能量既不能消灭,也不能产生。流体流动系统中,流体的能量主要表现为内能和机械能。流体的内能是指流体内部的总能量,包括流体分子热运动的能量、分子之间的位能和分子内部的结合能。内能是流体的属性,处于一定流动状态下的流体,它的内能也是一定的。流体的粘性会引起流动系统机械能损耗。如果流体是理想(忽略流体粘性)、不可压缩流体(密度不发生变化),流动系统和外界没有热交换,这种处于绝热过程的流体流动系统中机械能守恒,只有流体微团的位能、静压能和动能等机械能相互转换。

4.4.1 能量守恒定律

能量守恒定律表述为:流体的内能和动能在体积内的改变率,等于单位时间内向体积传递的热量,以及单位时间内质量力和面力所做的功。

在流场中任取一表面为 S 的流体体积 τ，S 的外法线单位矢量为 $\boldsymbol{n}$。设单位质量流体的内能为 E，单位质量的动能为 $\frac{U^2}{2}$，则体积 τ 内内能和动能的总和是 $\int_\tau \rho\left(E+\frac{U^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau$。能量守恒定律可以写为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\tau \rho\left(E+\frac{U^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau = \int_S k\frac{\partial T}{\partial n}\mathrm{d}S + \int_\tau \rho q\mathrm{d}\tau + \int_\tau \rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}\tau + \int_S \boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S \tag{4.4.1}$$

其中，单位时间内由于热传导通过表面 $\mathrm{d}S$ 传入体积 τ 内热量为 $\int_S k\frac{\partial T}{\partial n}\mathrm{d}S$，其中 k 为热传导系数，T 是温度，$\frac{\partial T}{\partial n}$ 是法线 $\boldsymbol{n}$ 方向的温度梯度；单位时间内由于辐射或其他原因传入体积 τ 内的总热量为 $\int_\tau \rho q\mathrm{d}\tau$，其中 q 为由于辐射或其他原因传入单位质量的热量分布函数；质量力 $\boldsymbol{F}$ 和面力 $\boldsymbol{p}_n$ 所做的功分别为 $\int_\tau \rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}\tau$ 和 $\int_S \boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S$。

4.4.2 积分形式的能量方程

根据物质体积分的随体导数表达式(4.1.12)式，改写(4.4.1)式中单位体积内能和动能体积分的随体导数，(4.4.1)式变为

$$\int_\tau \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(E+\frac{U^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}\tau + \int_S \rho u_n\left(E+\frac{U^2}{2}\right)\mathrm{d}S =$$

$$\int_S k\frac{\partial T}{\partial n}\mathrm{d}S + \int_\tau \rho q\mathrm{d}\tau + \int_\tau \rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}\tau + \int_S \boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S \tag{4.4.2}$$

上式是积分形式的能量方程。

4.4.3 微分形式的能量方程

(1)微分形式的能量方程

根据利用质量守恒定律导出的(4.2.11)式，内能和动能总和的体积分的随体导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\tau \rho\left(E+\frac{U^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau = \int_\tau \rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E+\frac{U^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau$$

应用奥高公式，将(4.4.1)式中的热传导热量 $\int_S k\frac{\partial T}{\partial n}\mathrm{d}S$ 和面力做功 $\int_S \boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S$ 两个面积分分别转换为体积分，即

$$\int_S k\frac{\partial T}{\partial n}\mathrm{d}S = \int_S \boldsymbol{n}\cdot k\nabla T\mathrm{d}S = \int_\tau \nabla\cdot(k\nabla T)\mathrm{d}\tau$$

$$\int_S \boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S = \int_S (\boldsymbol{n}\cdot P)\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S = \int_S \boldsymbol{n}\cdot(P\cdot\boldsymbol{u})\mathrm{d}S = \int_\tau \nabla\cdot(P\cdot\boldsymbol{u})\mathrm{d}\tau$$

其中 P 是二阶应力对称张量。将上面三个表达式代入(4.4.1)式，得

$$\int_\tau \rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E+\frac{U^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau = \int_\tau \nabla\cdot(k\nabla T)\mathrm{d}\tau + \int_\tau \rho q\mathrm{d}\tau + \int_\tau \rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}\tau + \int_\tau \nabla\cdot(P\cdot\boldsymbol{u})\mathrm{d}\tau$$

假定上式中所有体积分的被积函数连续，因为体积 τ 是任意的，由上式得到下面的微分方程：

$$\rho\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} + \rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{U^2}{2}\right) = \nabla\cdot(k\nabla T) + \rho q + \rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u} + \nabla\cdot(P\cdot\boldsymbol{u}) \tag{4.4.3}$$

上式是微分形式的能量方程。能量方程(4.4.3)式中 $\rho\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ 是单位体积内内能的随体导数；$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{U^2}{2}\right)$ 是单位体积内动能的随体导数；$\nabla\cdot(k\nabla T)$ 是单位体积内由于热传导传入的热量；ρq 是单位体积内由于辐射或其他原因传入的热量；$\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}$ 是单位体积内质量力所做的功；$\nabla\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u})$ 是单位体积内面力所做的功。

微分形式的能量方程可用张量表示为

$$\rho\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}+\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}u_iu_i\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\rho q+\rho F_iu_i+\frac{\partial(p_{ij}u_i)}{\partial x_i} \tag{4.4.4}$$

(2)直角坐标形式的能量方程

微分形式的能量方程在直角坐标系中的形式为

$$\begin{aligned}&\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_x\frac{\partial}{\partial x}+u_y\frac{\partial}{\partial y}+u_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[E+\frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2+u_z^2)\right]=\\&\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\rho q+\rho(u_xF_x+u_yF_y+u_zF_z)+\\&\frac{\partial}{\partial x}(p_{xx}u_x+p_{xy}u_y+p_{xz}u_z)+\frac{\partial}{\partial y}(p_{yx}u_x+p_{yy}u_y+p_{yz}u_z)+\\&\frac{\partial}{\partial z}(p_{zx}u_x+p_{zy}u_y+p_{zz}u_z)\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

(3)微分形式的能量方程的另一种形式

微分形式的能量方程(4.4.3)式中，单位体积内面力所做功一项可表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u})&=\mathrm{div}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{P})=\frac{\partial}{\partial x_j}(u_ip_{ij})=u_i\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}+p_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\\&u_i\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}+p_{ij}a_{ij}+p_{ij}s_{ij}=\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}:\boldsymbol{S}\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

其中 s_{ij} 是对称张量，a_{ij} 是反对称张量，$p_{ij}a_{ij}=0$；$\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{P}$ 是面力改变作功；$\boldsymbol{P}:\boldsymbol{S}$ 是流体变形后面力做功。

将(4.4.6)式代入(4.4.3)式，得

$$\rho\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}+\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{U^2}{2}\right)=\mathrm{div}(k\mathrm{grad}T)+\rho q+\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}:\boldsymbol{S} \tag{4.4.7}$$

可以证明

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{U^2}{2}\right)=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{P} \tag{4.4.8}$$

事实上，在运动微分方程两边点乘速度矢量 $\boldsymbol{u}$ 便可得到上式。将(4.4.8)式代入(4.4.7)式，得

$$\rho\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\mathrm{div}(k\mathrm{grad}T)+\rho q+\boldsymbol{P}:\boldsymbol{S} \tag{4.4.9}$$

上式表明单位体积内单位时间内能的增加，等于由于热传导、辐射或其他原因传入的热量与流体变形后面力做功的总和。(4.4.9)式的张量表示为

$$\rho\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\rho q+p_{ij}s_{ij} \tag{4.4.10}$$

(4.4.9)式在直角坐标系中的形式为

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + u_x \frac{\partial U}{\partial x} + u_y \frac{\partial U}{\partial y} + u_z \frac{\partial U}{\partial z} =$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right) +$$
$$\rho q + p_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + p_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + p_{zz} \frac{\partial u_z}{\partial z} +$$
$$p_{xy}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) + p_{yz}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) + p_{zx}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \tag{4.4.11}$$

4.5 本 构 方 程

以应力表示的运动方程描述了运动流体的加速度和力的关系，没有反映流体的变形与受力的关系。以应力表示的运动方程中未知量有九个（三个速度分量和六个应力分量），而三个运动方程加上一个连续性方程只有四个，因此方程是不封闭的。为了使方程封闭，需要补充方程。建立流体的应力与变形率之间的关系，可以补充方程使方程封闭。描述流体的应力与变形速率之间的关系的方程称为本构方程。流体的本构方程是根据所谓广义牛顿定律推导出来的。

4.5.1 广义牛顿定律的基本假定

牛顿粘性定律给出的应力和应变之间的关系，仅适用于最简单的剪切流动。对于复杂流动，很难确定应力张量和变形速度张量之间的关系。为了寻求应力张量和变形速度张量之间的关系，人们按照几个基本假定提出了广义牛顿定律。这些假定是：

1）运动流体的应力张量 P 在流体运动停止后，趋于静止流体的应力张量；

2）流体中一点的应力是该点瞬时变形率的线性函数；

3）流体各向同性，即流体的所有物性在各个分向上都相同；

4）不可压缩流体的粘性，仅用动力学粘性常数 μ 来表示。

假定 2）和假定 4）中，包含了斯托克斯假设。

依据假定 1），可以将应力张量 P 分解为各向同性和各向异性部分，即

$$P = -pI + P' \tag{4.5.1}$$

式中 p 是流体的平均法向应力。上式的分量形式为

$$\begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \tag{4.5.2}$$

（4.5.1）式的张量表示是

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \tag{4.5.3}$$

各向异性应力张量 τ_{ij} 称为偏应力张量，它也是二阶对称张量。当运动停止时，偏应力张量 τ_{ij} 趋于零，这时的应力张量 P 趋于静止流体的压力函数 $-pI$。

依据假定 2），偏应力张量 τ_{ij} 与局部速度梯度（变形率）$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 之间的关系为

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \tag{4.5.4}$$

式中 c_{ijkl}是流体的粘性常数。(4.5.4)式的形式由牛顿粘性定律推广建立起来的。τ_{ij}和$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$都是二阶张量,根据张量识别定理,$c_{ijkl}$是四阶张量,因此共有 $3^4=81$ 个分量,也就是说,表征流体粘性的常数共有 81 个。粘性流体流动时,速度分布不均匀,由于流体的粘性产生的偏应力,总是力图使流场中的速度分布回到均匀状态。

依据假定 3),流体的所有物性,诸如密度、粘性、扩散性、热传导等,在各个分向上都是相同的,不依赖于坐标系的转换。可以证明,由于流体各向同性,c_{ijkl}的数目由 81 个减少为 2 个。事实上,二阶张量$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$可以分解为对称张量 s_{ij}(变形速度张量)和反对称张量 a_{ij}(旋转速度张量 $-\varepsilon_{klm}\omega_m$),(4.5.4)式变为

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}s_{kl} - c_{ijkl}\varepsilon_{klm}\omega_m \tag{4.5.5}$$

在张量表示中,四阶各向同性张量 c_{ijkl}的形式为

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{4.5.6}$$

式中只有 λ 和 μ 两个独立常数,c_{ijkl}的下标 i 和 j 是对称的,下标 k 和 l 也是对称的。由于下标 k 和 l 是对称的,置换符号 ε_{klm} 等于零,(4.5.5)式中第二项为零,即

$$c_{ijkl}\varepsilon_{klm}\omega_m = 0$$

于是(4.5.5)式成为

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}s_{kl} \tag{4.5.7}$$

上式表明偏应力与旋转速度无关。将(4.5.6)式代入(4.5.7)式,得

$$\tau_{ij} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}s_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})s_{kl}$$

由于下标 i 和 j 是对称的,则上式可写为

$$\tau_{ij} = \lambda s_{kk}\delta_{ij} + 2\mu s_{ij} \tag{4.5.8}$$

将(4.5.8)式代入(4.5.3)式,得

$$p_{ij} = (-p + \lambda s_{kk})\delta_{ij} + 2\mu s_{ij}$$

令 $\mu' = \lambda + \frac{2}{3}\mu$,上式变为

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\left(s_{ij} - \frac{1}{3}s_{kk}\delta_{ij}\right) + \mu' s_{kk}\delta_{ij} \tag{4.5.9}$$

式中 μ 是流体的动力粘性系数;μ'是流体的膨胀粘性系数,也称为第二粘性系数;s_{kk}是流体速度散度的张量表示,代表流体的可压缩性,即

$$s_{kk} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \mathrm{div}\boldsymbol{u}$$

当下标 $i=j$ 时,$\delta_{ij}=3$,于是(4.5.9)式为

$$p_{ii} = -3p + 2\mu(s_{ii} - s_{kk}) + 3\mu' s_{kk}$$

即

$$\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) = -p + \mu'\mathrm{div}\boldsymbol{u} \tag{4.5.10}$$

当流体不可压缩($\mathrm{div}\boldsymbol{u}=0$),式中 μ'自动不出现。斯托克斯假设 $\mu'=0$,认为粘性流体的压力

函数就是平均法向应力，即

$$p = -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) \tag{4.5.11}$$

斯托克斯假设是斯托克斯于1880年针对一般气体运动提出的。大量实际计算证明粘性流体的压力函数与热力学压力函数是相等的，从而说明了斯托克斯假设的合理性。

4.5.2 广义牛顿公式

在斯托克斯假设下，由(4.5.9)式得到广义牛顿公式：

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\left(s_{ij} - \frac{1}{3}s_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{4.5.12}$$

或写为

$$P = -pI + 2\mu\left(S - \frac{1}{3}I\mathrm{div}\boldsymbol{u}\right) \tag{4.5.13}$$

通过广义牛顿公式表示的应力与瞬时变形率的关系，称为广义牛顿定律。

广义牛顿公式的分量形式为

$$\begin{aligned}
p_{xx} &= -p + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\mathrm{div}\boldsymbol{u} \\
p_{yy} &= -p + 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\mathrm{div}\boldsymbol{u} \\
p_{zz} &= -p + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\mathrm{div}\boldsymbol{u} \\
p_{xy} &= p_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\
p_{xz} &= p_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\
p_{yz} &= p_{zy} = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{4.5.14}$$

不可压缩流体的广义牛顿公式为

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu s_{ij} \tag{4.5.15}$$

或写为

$$p = -pI + 2\mu S \tag{4.5.16}$$

应力张量和变形速度张量之间的关系满足广义牛顿公式的流体称为牛顿流体。牛顿流体是人们接触最多的一类流体。广义牛顿定律是人们长期总结流体力学理论、观察流体力学实验后提出的，用广义牛顿定律描写流体的本构方程（广义牛顿公式）的合理性和实用性得到了流体力学实践的广泛证明。

4.6 流体力学基本方程组

连续性方程、运动方程、能量方程和本构方程，加上状态方程、内能和熵的表达式，组成流体力学基本方程组。

4.6.1　微分形式的基本方程组

(1)应力形式的基本方程组

流体力学微分形式的基本方程组由下面的方程组成：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u})=0 & (\text{连续性方程}) \\ \rho\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\rho\boldsymbol{F}+\mathrm{div}P & (\text{运动方程}) \\ \rho\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=P:S+\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}T)+\rho q & (\text{能量方程}) \\ P=-pI+2\mu\left(S-\dfrac{1}{3}I\mathrm{div}\boldsymbol{u}\right)+\mu' I\mathrm{div}\boldsymbol{u} & (\text{本构方程}) \\ p=f(\rho,T) & (\text{状态方程}) \end{cases} \tag{4.6.1}$$

对于完全气体，状态方程为 $p=\rho RT$。应力形式的基本微分方程组(4.6.1)式由 12 个方程组成的封闭方程组，给定粘性系数 μ,μ'，热传导系数 k，温度 T 的梯度和内能 E 的表达式，便可以确定速度矢量 $\boldsymbol{u}$，压力 p，密度 ρ，温度 T 和 6 个应力分量 $p_{xx},p_{yy},p_{zz},p_{xy},p_{yz},p_{zx}$ 等 12 个未知数。

(2)张量形式的基本方程组

微分形式基本方程组(2.7.1)式的张量形式为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i}=0 \\ \rho\dfrac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=\rho F_i+\dfrac{\partial p_{ij}}{\partial x_k} \\ \rho\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=p_{ij}s_{ji}+\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(k\dfrac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\rho q \\ p_{ij}=-p\delta_{ij}+2\mu\left(s_{ij}-\dfrac{1}{3}s_{kk}\delta_{ij}\right)+\mu' s_{kk}\delta_{ij} \\ p=f(\rho,T) \end{cases} \tag{4.6.2}$$

(3)应变形式的基本方程组

微分形式的基本方程组中，本构方程给出了应力张量 P 和变形速度张量 S 之间的关系。可以利用本构方程将运动方程和能量方程中的应力张量 P 消去，代之以变形速度张量 S 的表达形式。

运动方程中，应力张量的散度 $\mathrm{div}P$ 为

$$\begin{aligned} \mathrm{div}P=\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}&=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[-p\delta_{ij}+2\mu\left(s_{ij}-\frac{1}{3}s_{kk}\delta_{ij}\right)+\mu' s_{kk}\delta_{ij}\right]= \\ &-\frac{\partial p}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[2\mu\left(s_{ij}-\frac{1}{3}s_{kk}\delta_{ij}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_j}(\mu' s_{kk}\delta_{ij})= \\ &-\frac{\partial p}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(\mu s_{kk})+\frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu s_{ij})+\frac{\partial}{\partial x_j}(\mu' s_{kk}) \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

于是，运动方程可以写为矢量形式

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\rho\boldsymbol{F}-\mathrm{grad}p-\frac{2}{3}\mathrm{grad}(\mu\mathrm{div}\boldsymbol{u})+\mathrm{div}(2\mu S)+\mathrm{grad}(\mu'\mathrm{div}\boldsymbol{u}) \tag{4.6.4}$$

当 μ = 常数时，(4.6.3)式中

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[2\mu\left(s_{ij}-\frac{1}{3}s_{kk}\delta_{ij}\right)\right]=\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{2}{3}s_{kk}\right)=$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_j}\right)-\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{2}{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_j}\right)=\mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{1}{3}\frac{\partial s_{kk}}{\partial x_i}\right)$$

将上式代入(4.6.3)式，且 $\mu'=0$ 时，(4.6.3)式变成

$$\mathrm{div}P=-\frac{\partial p}{\partial x_j}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{1}{3}\frac{\partial s_{kk}}{\partial x_i}\right)$$

当 μ = 常数且 $\mu'=0$ 时，将上式代入运动方程，运动方程(4.6.4)式变为

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\rho\boldsymbol{F}-\mathrm{grad}p+\mu\Delta\boldsymbol{u}+\frac{1}{3}\mu\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}) \tag{4.6.5}$$

能量方程中，应力张量做功为

$$P:S=p_{ij}s_{ji}=\left[-p\delta_{ij}+2\mu\left(s_{ij}-\frac{1}{3}s_{kk}\delta_{ij}\right)+\mu's_{kk}\delta_{ij}\right]s_{ji}=$$

$$-ps_{kk}+2\mu\left(s_{ij}s_{ji}-\frac{1}{3}s_{kk}^2\right)+\mu's_{kk}^2 \tag{4.6.6}$$

其中，$-ps_{kk}=-p\mathrm{div}\boldsymbol{u}$ 是体积相对膨胀或压缩时压力所做的功；

$2\mu\left(s_{ij}s_{ji}-\frac{1}{3}s_{kk}^2\right)=2\mu S:S-\frac{2}{3}\mu(\mathrm{div}\boldsymbol{u})^2$ 是粘性应力张量做功；

$\mu's_{kk}^2=\mu'(\mathrm{div}\boldsymbol{u})^2$ 是体积膨胀时粘性(流体内摩擦)损耗的机械能。

(4.6.6)式中粘性应力张量做功，可以用耗散函数 Φ 来表示，即

$$\Phi=2\mu S:S-\frac{2}{3}\mu(\mathrm{div}\boldsymbol{u})^2=2\mu\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\frac{1}{2}\theta_1^2+\frac{1}{2}\theta_2^2+\frac{1}{2}\theta_3^2\right)-$$

$$\frac{2}{3}\mu(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\varepsilon_2\varepsilon_3+2\varepsilon_3\varepsilon_1)=$$

$$\mu(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2)+\frac{2}{3}\mu(2\varepsilon_1^2+2\varepsilon_2^2+2\varepsilon_3^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\varepsilon_2\varepsilon_3+2\varepsilon_3\varepsilon_1)=$$

$$\mu(\theta_1^2+\theta_2^2\theta_3^2)+\frac{2}{3}\mu[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2\varepsilon] \tag{4.6.7}$$

耗散函数 Φ 表示因为流体剪切变形粘性损耗的机械能，这部分机械能全部转化为热能，是一个不可逆过程。显然，流体没有变形作刚体运动($\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\theta_1=\theta_2=\theta_3=0$)或流体作各向同性膨胀或压缩时($\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3,\theta_1=\theta_2=\theta_3=0$)，耗散函数 $\Phi=0$，流体流动系统没有机械能损耗。将耗散函数 Φ 代入(4.6.6)式，应力张量做功可表示为

$$P:S=-p\mathrm{div}\boldsymbol{u}+\Phi+\mu'(\mathrm{div}\boldsymbol{u})^2 \tag{4.6.8}$$

在斯托克斯假设下($\mu'=0$)，上式变为

$$P:S=-p\mathrm{div}\boldsymbol{u}+\Phi \tag{4.6.9}$$

将(4.6.9)式代入方程组(4.6.1)式中的能量方程，得

$$\rho\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}+p\mathrm{div}\boldsymbol{u}=\Phi+\mathrm{div}(k\mathrm{grad}T)+\rho q \tag{4.6.10}$$

由方程组(4.6.1)式中的连续性方程得

$$p\mathrm{div}\boldsymbol{u} = -\frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \rho p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

能量方程(4.6.10)式左端为

$$\rho\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} + p\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \rho\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} + p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right) = \rho\left[\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} + p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]$$

根据热力学关系式

$$T\mathrm{d}s = \mathrm{d}E + p\mathrm{d}V = \mathrm{d}E + p\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

有

$$\rho\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} + p\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \rho T\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

于是,能量方程(4.6.10)式可写成

$$\rho T\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \Phi + \mathrm{div}(k\mathrm{grad}T) + \rho q \tag{4.6.11}$$

上式表明,流体剪切变形粘性损耗的机械能,以及由于热传导、热辐射或其他原因传入流体的热量,使流体内的熵增加。

当 $\mu' = 0$,根据运动方程(4.6.4)式或(4.6.5)式,及能量方程(4.6.11)式,应力形式的基本微分方程组(4.6.1)式可写改写为下面应变形式的基本微分方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u}) = 0) \\ \rho\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\boldsymbol{F} - \mathrm{grad}p + 2\mathrm{div}(\mu S) - \dfrac{2}{3}\mathrm{grad}(\mu\mathrm{div}\boldsymbol{u}) \\ \text{或}\ \rho\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\boldsymbol{F} - \mathrm{grad}p + \mu\Delta\boldsymbol{u} + \dfrac{\mu}{3}\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{u})(\mu = \text{常数}) \\ \rho T\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \Phi + \mathrm{div}(k\mathrm{grad}T) + \rho q \\ P = -pI + 2\mu\left(S - \dfrac{1}{3}I\mathrm{div}\boldsymbol{u}\right) \\ p = f(\rho, T)\end{cases} \tag{4.6.12}$$

上式是用应变张量 S 表示的基本微分方程组,它是由 12 个方程组成的封闭方程组。利用连续性方程、运动方程、能量方程和状态方程,可以确定速度矢量 $\boldsymbol{u}$,压力 p,密度 ρ,温度 T 等 6 个未知量。而 $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{xy}, p_{yz}, p_{zx}$ 六个应力分量是速度矢量 $\boldsymbol{u}$ 和压力 p 的函数,由应力张量 P 可以求得。当 μ = 常数且 $\mu' = 0$ 时,基本微分方程组(4.6.12)中的运动方程代之以(4.6.5)的形式。式中耗散函数 Φ 由(4.6.7)式确定;应力张量 P 为

$$P = \begin{pmatrix} -p + 2\mu\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x} - \dfrac{1}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{u}\right) & \mu\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial y} + \dfrac{\partial u_x}{\partial x}\right) & \mu\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial y} + \dfrac{\partial u_x}{\partial x}\right) & -p + 2\mu\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial y} - \dfrac{1}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{u}\right) & \mu\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) & \mu\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right) & -p + 2\mu\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial z} - \dfrac{1}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{u}\right) \end{pmatrix}$$

(4)粘性不可压缩均质流体的基本微分方程组

当μ = 常数(牛顿流体),粘性不可压缩均质流体(ρ = 常数)的基本微分方程组为

$$\begin{cases} \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \\ \rho\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\boldsymbol{F} - \mathrm{grad}p + \mu\triangle\boldsymbol{u}) \\ \rho T\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \Phi + \mathrm{div}(k\mathrm{grad}T) + \rho q \\ P = -pI + 2\mu S \end{cases} \tag{4.6.13}$$

(5)理想流体的基本微分方程组

设完全气体是理想绝热的,这类理想可压缩流体的基本微分方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \\ \rho\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\boldsymbol{F} - \mathrm{grad}p \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{p}{\rho^{\gamma}}\right) = 0 \end{cases} \tag{4.6.14}$$

对于理想不可压缩均质流体,基本微分方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \\ \rho\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\boldsymbol{F} - \mathrm{grad}p \end{cases} \tag{4.6.15}$$

(6)静力学平衡微分方程

如果基本微分方程组(4.6.15)中运动方程的惯性力为零,流体处于平衡状态,便得到静力学平衡微分方程,即

$$\begin{cases} \rho F_x - \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \rho F_y - \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \rho F_z - \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{4.6.16}$$

(7)基本微分方程组在直角坐标系中的形式

应力形式的基本微分方程组(4.6.1)式在直角坐标系中的形式为

连续性方程:
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0 \tag{4.6.17a}$$

运动方程:
$$\begin{cases} \rho\dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = \rho F_x - \dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{xz}}{\partial z} \\ \rho\dfrac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} = \rho F_y - \dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{yz}}{\partial z} \\ \rho\dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t} = \rho F_z - \dfrac{\partial p}{\partial z} + \dfrac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{zz}}{\partial z} \end{cases} \tag{4.6.17b}$$

能量方程:
$$\rho T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \Phi + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \rho q \tag{4.6.17c}$$

本构方程(应力与应变的关系式):

$$\begin{cases} p_{xx} = -p + 2\mu\left[\dfrac{\partial u_x}{\partial x} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right] \\ p_{yy} = -p + 2\mu\left[\dfrac{\partial u_y}{\partial y} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right] \\ p_{zz} = -p + 2\mu\left[\dfrac{\partial u_z}{\partial z} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right] \\ p_{xy} = \mu\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right) \\ p_{yz} = \mu\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right) \\ p_{zx} = \mu\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \end{cases} \tag{4.6.17d}$$

状态方程(完全气体)：

$$p = \rho RT \tag{4.6.17e}$$

其中耗散函数为

$$\Phi = -\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 + 2\mu\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2\right]$$

(8)基本微分方程组在正交坐标系中的形式

应力形式的基本微分方程组(4.6.1)式在正交坐标系中的形式为

连续性方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(\rho H_2H_3u_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\rho H_3H_1u_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\rho H_1H_2u_3)}{\partial q_3}\right] = 0 \tag{4.6.18a}$$

运动方程：

$$\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{u_1u_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{u_1u_3}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{u_2^2}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{u_3^2}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right) = \\
&\rho F_1 + \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3p_{11}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1p_{12}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2p_{31})\right] + \\
&\frac{p_{12}}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{p_{13}}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{p_{22}}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{p_{33}}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} \\
&\rho\left(\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{u_1u_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{u_2u_3}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3} - \frac{u_3^2}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2} - \frac{u_1^2}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right) = \\
&\rho F_2 + \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3p_{12}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1p_{22}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2p_{23})\right] + \\
&\frac{p_{12}}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{p_{23}}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3} - \frac{p_{33}}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2} - \frac{p_{11}}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} \\
&\rho\left(\frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} + \frac{u_3u_1}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{u_2u_3}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2} - \frac{u_1^2}{H_3H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{u_2^2}{H_3H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\right) = \\
&\rho F_3 + \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3p_{31}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1p_{23}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2p_{33})\right] + \\
&\frac{p_{31}}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{p_{23}}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2} - \frac{p_{11}}{H_3H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{p_{22}}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}
\end{aligned} \tag{4.6.18b}$$

能量方程：

$$\rho T\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\Phi+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}k\frac{\partial T}{\partial q_1}+\frac{\partial}{\partial q_2}\right)\frac{H_3H_1}{H_2}k\frac{\partial T}{\partial q_2}+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}k\frac{\partial T}{\partial q_3}\right)\right]+\rho q \tag{4.6.18c}$$

本构方程(应力与应变的关系式)：

$$\begin{cases}p_{11}=-p+2\mu\left[\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial q_1}+\dfrac{u_2}{H_1H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_2}+\dfrac{u_3}{H_1H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_3}-\dfrac{1}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{u}\right]\\ p_{22}=-p+2\mu\left[\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial q_2}+\dfrac{u_3}{H_2H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial q_3}+\dfrac{u_1}{H_1H_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial q_2}-\dfrac{1}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{u}\right]\\ p_{33}=-p+2\mu\left[\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial u_3}{\partial q_3}+\dfrac{u_1}{H_3H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial q_1}+\dfrac{u_2}{H_2H_3}\dfrac{\partial H_3}{\partial q_2}-\dfrac{1}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{u}\right]\\ p_{12}=\mu\left(\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial u_1}{\partial q_2}+\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial u_2}{\partial q_1}-\dfrac{u_1}{H_1H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_2}-\dfrac{u_2}{H_1H_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)\\ p_{23}=\mu\left(\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial u_2}{\partial q_3}+\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial u_3}{\partial q_2}-\dfrac{u_2}{H_2H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial q_3}-\dfrac{u_3}{H_2H_3}\dfrac{\partial H_3}{\partial q_2}\right)\\ p_{31}=\mu\left(\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial u_3}{\partial q_1}+\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial u_1}{\partial q_3}-\dfrac{u_3}{H_3H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial q_1}-\dfrac{u_1}{H_3H_1}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_3}\right)\end{cases} \tag{4.6.18d}$$

状态方程(完全气体)：

$$p=f(\rho,T) \tag{4.6.18e}$$

将柱坐标和球坐标及其拉梅系数分别代入正交坐标系中的基本微分方程组的(4.6.18a)~(4.6.18e)式，可以列写出基本微分方程组在柱坐标系中的形式和球坐标系中的形式。

4.6.2 积分形式的基本方程组

当研究流体总体性质时，常常利用积分形式的基本方程组求解流体力学问题。积分形式的基本方程组形式为

$$\begin{cases}\displaystyle\int_\tau\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}\tau+\int_S\rho v_n\mathrm{d}S=0\\ \displaystyle\int_\tau\frac{\partial(\rho\boldsymbol{u})}{\partial t}\mathrm{d}\tau+\int_S\rho v_n\boldsymbol{u}\mathrm{d}S=\int_\tau\rho\boldsymbol{F}\mathrm{d}\tau+\int_S\boldsymbol{p}_n\mathrm{d}S\\ \displaystyle\int_\tau\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(E+\frac{U^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}\tau+\int_S\rho u_n\left(E+\frac{U^2}{2}\right)\mathrm{d}S=\\ \displaystyle\int_\tau\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}\tau+\int_S\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}S+\int_S k\frac{\partial T}{\partial n}\mathrm{d}S+\int_\tau\rho q\mathrm{d}\tau\\ \displaystyle\int_\tau\left[\boldsymbol{r}\times\frac{\partial(\rho\boldsymbol{u})}{\partial t}\right]\delta\tau+\int_S(\boldsymbol{r}\times\rho u_n\boldsymbol{u})\delta S=\int_\tau\boldsymbol{r}\times\rho\boldsymbol{F}\delta\tau+\int_S\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_n\delta S\\ \boldsymbol{P}=-p\boldsymbol{I}+2\mu\left(\boldsymbol{S}-\dfrac{1}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{u}\right)\\ p=f(\rho,T)\end{cases} \tag{4.6.19}$$

4.6.3 初始条件和边界条件

流体力学基本方程组描述了流体流动系统的运动。但是,要根据基本方程组确定每一个具体流动系统中流体的运动形态,还必须给定流体运动的初始条件和边界条件。只有在给定流体运动初始条件和边界条件的情况下,基本方程组通解中包含的任意常数才能求出,从而获得基本方程组惟一确定的解。

(1)初始条件

流体在初始时刻($t=t_0$)满足的流动状态是流体运动的初始条件,即

当 $t=t_0$ 时

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{r}),p(\boldsymbol{r},t)=p_0(\boldsymbol{r}),\rho(\boldsymbol{r},t)=\rho_0(\boldsymbol{r}),T(\boldsymbol{r},t)=T_0(\boldsymbol{r}) \qquad (4.6.20)$$

式中 $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{r}),p_0(\boldsymbol{r}),\rho_0(\boldsymbol{r}),T_0(\boldsymbol{r})$ 分别是流体在初始时刻的速度、压力、密度和温度,它们都是给定的已知函数。

(2)边界条件

满足流动边界要求的流动状态是流体运动的边界条件。由于流动边界是多种多样的,所以流体流动的边界条件也是多种多样的。这里仅举出解决流体流动问题时常常遇到的3种边界条件,即无穷远处边界条件、固体壁面边界条件和自由面边界条件。

无穷远处边界条件可以写为:

当 $r\to\infty$ 时,

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_\infty,p=p_\infty,\rho=\rho_\infty,T=T_\infty \qquad (4.6.21)$$

其中 $\boldsymbol{u}_\infty,p_\infty,\rho_\infty,T_\infty$ 分别是流体在无穷远处的速度、压力、密度和温度,它们都是给定的已知函数。所谓无穷远处,是指流体流动边界距离关注的流场位置的矢径 $\boldsymbol{r}$ 趋于无穷大($r\to\infty$)。实际上,对于远距流体对象的流动边界,按无穷远处边界条件来处理,都能够满足解决问题的需要。例如,研究高层建筑流体致振问题时,高层建筑的大气绕流是远处来流,应该满足无穷远处边界条件(4.6.21)式。

流体与固体壁面接触时的流动状态,是流体应满足的固体壁面边界条件。如果用下标 w 代表固体壁面,那么固体壁面边界条件可以写为:

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_w,T=T_w,\left(k\frac{\partial T}{\partial n}\right)=\left(k\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w \qquad (4.6.22)$$

其中 $\boldsymbol{u}_w,T_w,\left(k\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w$ 分别是固体壁面的速度、温度和通过固体壁面的热流量。当固体壁面处于静止状态时,$\boldsymbol{u}_w=0$,固体壁面边界条件变为:

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_w=0,T=T_w,\left(k\frac{\partial T}{\partial n}\right)=\left(k\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w \qquad (4.6.23)$$

其中 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_w=0$ 称为流体无滑移条件和粘附条件,这是粘性流体宏观运动时的重要性质。如果流体是理想流体,固体壁面边界条件为:

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_w \qquad (4.6.24)$$

气体的密度和粘性远小于液体的密度和粘性。如果气体的惯性力和粘性力引起的压力和应力变化,与液体的相比可以忽略不计,这种情况下液体与气体的交接面是液体的自由面。

忽略表面张力后,如果大气压力是 p_0,则与大气接触的理想流体的自由面边界条件为

$p = p_0$。

习　题

4.1　在定常流动中，一段由流体质点组成的微元流管两端横截面面积分别为 $\delta\sigma_1$ 和 $\delta\sigma_2$。设 φ 是定义在流管中的标量函数，求它在该流管元上的体积分的随体导数。

4.2　在非定常流动中，一段由流体质点组成的微元流管两端横截面面积分别为 $\delta\sigma_1$ 和 $\delta\sigma_2$。设 $\boldsymbol{a}$ 是定义在流管中的矢量函数，求它在该段流管元上的体积分的随体导数。

4.3　试用拉格朗日观点推导拉格朗日变数下的连续性方程。

4.4　试用欧拉观点求出流体流动时连续性方程在下述坐标系中的一般表达式：

(1)柱坐标系中的连续性方程；

(2)球坐标系中的连续性方程。

4.5　在流场中取一段由流体质点组成的流管，流管不同横截面的面积分别为 S_1 和 S_2，位于 S_1 和 S_2 之间的流管侧面为 S。设由 S_1、S_2 和 S 所包围的流体体积为 V。对体积 V 运用质量守恒定律，求：

(1)一般流体流动的质量守恒定律的数学表达式；

(2)可压缩流体定常流动的质量守恒定律的数学表达式；

(3)不可压缩流体流动的质量守恒定律的数学表达式。

4.6　不可压缩流体流动在 z 方向的速度分量为零，x 方向的速度分量为

$$u_x = ax^2 + by$$

其中 a 与 b 为常数。当 $y=0, u_y=0$ 时，求 y 方向的速度分量。

4.7　流体作二维、定常不可压缩流动时，x 方向的速度分量为

$$u_x = e^{-x}\cosh y + 1$$

当 $y=0, u_y=0$ 时，求 y 方向的速度分量。

4.8　试判断下述的流体运动是否是不可压缩流体流动：

(1) $u_x = x, u_y = y, u_z = z$；

(2) $u_x = yzt, u_y = xzt, u_z = xyt$；

(3) $u_x = 2x^2 + y, u_y = 2y^2 + z, u_z = -4(x+y)z + xy$；

(4) $u_x = -\dfrac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}, u_y = \dfrac{(x^2-y^2)z}{(x^2+y^2)^2}, u_z = \dfrac{y}{x^2+y^2}$。

4.9　试证在不可压缩流体流动中，流管具有下列性质：

(1)各截面上流量相同；

(2)流管不会在流体中产生和消失。

4.10　运用拉格朗日观点推导理想流体的拉格朗日型的运动方程。

4.11　运用欧拉观点采用体积元方法推导下述坐标系中的运动方程：

(1)直角坐标表示的运动方程；

(2)柱坐标表示的运动方程；

(3)球坐标表示的运动方程。

4.12　设流管截面积为 A,描述流体流动的物理量在截面 A 上是均匀的。如果流管不随时间变化,试证明连续方程具有下面的形式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial s}(\rho A u) = 0$$

式中 u 是速度,s 是流动方向的弧长。

第 5 章

流体流动守恒原理及其应用

如果不需要了解流场的详细结构和流体流动过程中的细节,就可以应用质量、能量和动量守恒原理,利用控制体和控制面方法,对流体对象进行总体衡算后考察流体流动参数的变化规律。如果要求了解流体流动参数在流场中的分布规律,还必须取流体微元体进行微分衡算。

在介绍流体流动守恒原理及其应用时,为了便于得到流动过程中速度和压力等流体量之间的关系,通常都要对工程实际中复杂的流动问题作必要的、合理的简化。应用守恒原理对流体进行总体衡算时,依据的数学方程是有限形式的积分方程。如果忽略与流动方向垂直的截面上流动参数的变化,相应流体量的积分运算因采用平均值而得到简化;如果忽略流体的粘性和不可压缩性,方程中被积分函数形式的结构也得以简化。

利用控制体和控制面方法,应用守恒原理对流体对象进行总体衡算方法,可以方便快捷地得到流体流动参数的变化规律,因此在流体工程中得到广泛运用。

5.1 流体流动守恒原理的一般描述

5.1.1 控制体和控制面方法

(1)控制体和控制面

在流体流动系统中应用守恒原理,通常采用欧拉观点在流场中选择固定空间作为研究对象,这个固定空间称为控制体,控制体的封闭表面称为控制面。

根据实际问题的需要,控制体的形状和大小可以任意选取,但是一经选定,控制体的形状和位置便固定下来不随时间变化。占据控制体的流体质点是随时间变化的,即不同时刻占据控制体的流体质点可能不同。流体质点可以通过控制面,自由进出控制体。

在流场中选择好固定空间后,利用控制体和控制面方法进行图示时,一般用虚线画出控制体的边界,于是所作的虚线便代表控制面。作用在控制体上的彻体力,穿透控制面作用在控制体内每个流体质点上;作用在控制体上的表面力,不能穿透控制面而直接作用在控制面上。

(2)守恒原理的一般表述

选定控制体和控制面后，质量守恒原理、能量守恒原理和动量守恒原理可以统一表述为：

控制体中特征量(质量、能量和动量)的变化率，等于该特征量通过控制面输入控制体的速率与输出控制体的速率之差。

守恒原理的一般表述写成文字表达形式为

(特征量的变化率)=(特征量的输入速率)-(特征量的输出速率)

利用控制体和控制面方法，依据质量守恒原理、能量守恒原理和动量守恒原理给出的数学表达式，都可以仿照上面文字表达的形式书写。

5.1.2 质量守恒原理

(1)质量守恒原理

在流体中取由一定的流体质点组成的物质体，其体积为 τ。由4.2节可知，任一时刻质量守恒原理可表示为

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\tau}\rho\delta\tau=0 \tag{5.1.1}$$

积分形式的连续方程为

$$\int_{\tau}\frac{\partial\rho}{\partial t}\delta\tau+\int_{\tau}\rho v_n\delta S=0 \tag{5.1.2}$$

(2)一维流动的连续性方程



图5.1 流管中的一维流动

下面利用控制体和控制面方法，讨论一维流动的连续性方程。在流场中选取一段有限长流管，流体在流管中作一维定常流动，如图5.1所示。流管轴线为 x，流体沿 x 轴向下游流动，截面1-1处的面积为 A_1，流体密度为 ρ_1；截面2-2处的面积为 A_2，流体密度为 ρ_2。选取该段流管的管壁和截面1-1、截面2-2为控制体的表面。

设流体流进截面1-1的平均流速为 U_1，流出截面2-2的平均流速为 U_2。根据质量守恒原理，单位时间内输入和输出控制体的质量之差，等于单位时间内该控制体内所含物质的增量，即

$$\rho_1U_1A_1-\rho_2U_2A_2=\frac{\partial\int_{V}\rho\delta V}{\partial t} \tag{5.1.3}$$

式中 V 是控制体的体积。上式是一维流动的连续性方程。

5.1.3 能量守恒原理

在流体流动系统中，流体的能量主要表现为机械能和内能。内能是流体内部的总能量，包括分于热运动的能量、分子之间的位能和分子内的结合能。内能是流体的属性，在一定状态下内能是一定的。

能量守恒原理表述为：流体的内能和动能在控制体积内的改变率，等于单位时间内向控制体积传递的热量，以及单位时间内质量力和面力所做的功。

在流场中任取一表面为 S 的流体体积 V，S 的外法线单位矢量为 $\boldsymbol{n}$。设单位质量流体的内

能为 E,单位质量的动能为 $U^2/2$,则体积 V 内内能和动能的总和是 $\int_V \rho(E + U^2/2)\,\mathrm{d}V$,能量守恒定律可以写为:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\left(E + \frac{U^2}{2}\right)\mathrm{d}V = \int_S k\frac{\partial T}{\partial n}\mathrm{d}S + \int_V \rho q \mathrm{d}V + \int_\tau \rho \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{u}\mathrm{d}\tau + \int_S \boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{u}\mathrm{d}S \tag{5.1.4}$$

其中,单位时间内由于热传导通过表面 dS 传入体积 τ 内的热量为 $\int_S k\frac{\partial T}{\partial n}\mathrm{d}S$,k 为热传导系数,T 是温度,$\partial T/\partial n$ 是法线 n 方向的温度梯度;单位时间内由于辐射或其他原因传入体积 τ 内的总热量为 $\int_\tau \rho q \mathrm{d}\tau$,q 为由于辐射或其他原因传入单位质量的热量分布函数;质量力 $\boldsymbol{F}$ 和面力 $\boldsymbol{p}_n$ 所做的功分别为 $\int_\tau \rho \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{u}\mathrm{d}\tau$ 和$\int_S \boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{u}\mathrm{d}S$ 。

积分形式的能量方程为

$$\int_\tau \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(E + \frac{U^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}\tau + \int_S \rho u_n\left(E + \frac{U^2}{2}\right)\mathrm{d}S = \int_S k\frac{\partial T}{\partial n}\mathrm{d}S + \int_\tau \rho q\mathrm{d}\tau + \int_\tau \rho \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{U}\mathrm{d}\tau + \int_S \boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{u}\mathrm{d}S \tag{5.1.5}$$

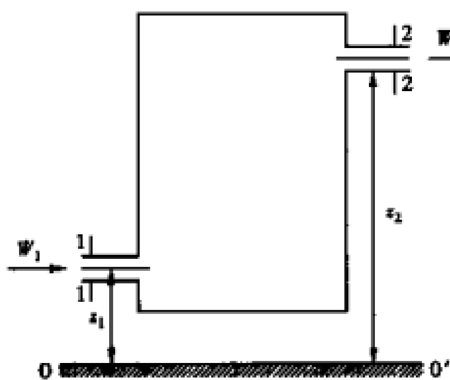


图 5.2　流动系统的机械能衡算

如果流体流动系统中没有加热或冷却,可以忽略流体粘性,流体的密度不变,那么这种流体系统是理想、不可压缩的等熵流动系统,其内能保持不变。对这种系统的能量衡算,只需要进行机械能衡算。如图 5.2 所示,没有外功加入的系统,其流体机械能有位能、静压能和动能。表述这一机械能衡算关系的能量方程是伯努利方程,即

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{U_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{U_2^2}{2} \tag{5.1.6}$$

5.1.4　动量守恒原理

(1)动量守恒原理的一般表述

流体动量随时间的变化率,等于作用在流体上所有外力的矢量和。利用控制体和控制面方法,动量守恒原理的一般表述写成文字表达形式为

(作用于控制体的外力合力)=(单位时间内控制体中流体动量的增量)+(单位时间内从控制体输出的流体动量)-(单位时间内从控制体输入的流体动量)

(2)动量守恒原理

任取一体积为 V 的流体,其边界为 S。设作用在单位质量上的质量力分布函数为 $\boldsymbol{F}$,作用在单位面积上的面力分布函数为 $\boldsymbol{p}_n$,动量守恒原理为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \boldsymbol{u}\delta V = \int_V \rho \boldsymbol{F}\delta V + \int_S \boldsymbol{p}_n \delta S \tag{5.1.7}$$

积分形式的动量方程为

$$\int_V \frac{\partial(\rho \boldsymbol{u})}{\partial t}\delta V + \int_S \rho u_n \boldsymbol{u}\delta S = \int_V \rho \boldsymbol{F}\delta V + \int_S \boldsymbol{p}_n \delta S \tag{5.1.8}$$

(3) 动量矩定理

任取一点为力矩参考点，$\boldsymbol{r}$ 为流体质点到参考点的矢径，则动量矩定理为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{r}\times\rho\boldsymbol{u}\delta V = \int_V \boldsymbol{r}\times\rho\boldsymbol{F}\delta V + \int_S \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_n\delta S \tag{5.1.9}$$

积分形式的动量矩方程为

$$\int_V\left[\boldsymbol{r}\times\frac{\partial(\rho\boldsymbol{u})}{\partial t}\right]\delta V + \int_S(\boldsymbol{r}\times\rho u_n\boldsymbol{u})\delta S = \int_V \boldsymbol{r}\times\rho\boldsymbol{F}\delta V + \int_S \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_n\delta S \tag{5.1.10}$$

(4) 一维管流动量守恒

设有一管轴线为 x 的非均匀管段，x 轴线与重力方向的夹角为 α，如图 5.3 所示。截面 1－1 处的面积为 A_1，流体速度为 U_1，压力为 p_1；截面 2－2 处的面积为 A_2，流体速度为 U_2，压力为 p_2。F_x 是管壁上流体摩擦阻力的合力在 x 方向的分力。该管段在 x 轴方向的动量守恒表达式为

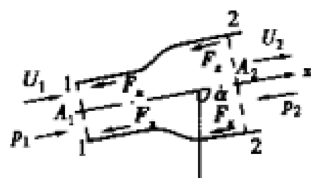


图 5.3　非均匀管段

$$\begin{aligned} &p_1A_1 - p_2A_2 - F_x + \int_{x_1}^{x_2}\rho g A\cos\alpha \mathrm{d}x = \\ &(\rho_1A_1U_1)U_1 - (\rho_2A_2U_2)U_2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1}^{x_2}\rho U A \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

如果是定常流动，且 $\alpha = \pi/2$，即管段的 x 轴线在水平面内，(5.1.11)式变为

$$p_1A_1 - p_2A_2 - F_x = (\rho_1A_1U_1)U_1 - (\rho_2A_2U_2)U_2 \tag{5.1.12}$$

在上面的式子中，每个流动截面上的速度和密度都取平均值。实际流动中，每个流动截面上都存在速度分布，用平均速度计算时需要对截面引入动量校正系数 β。圆管层流时，动量校正系数 $\beta = 4/3$；圆管湍流时，动量校正系数 $\beta = 1$。

5.2　一维连续性方程及其应用

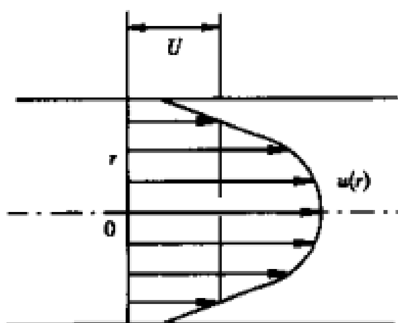


图 5.4　管内速度分布

工程中不可压缩流体一维定常流动是最简单的流动形式，由于这种流动现象广泛存在，使解决这类问题的一维流动的连续性方程受到关注。由一维流动的连续性方程可以导出不可压缩流体定常流动的一维连续性方程。

5.2.1　体积流量和质量流量

由于粘性的存在，管截面上各点的流速并不相等，如图 5.4 所示。工程计算中常用平均速度来代替实际的速度分布，即

$$U = \frac{\int_A u \mathrm{d}A}{A} \tag{5.2.1}$$

式中 U 是截面上的平均速度，A 是截面面积，u 是截面上的速度分布。上式表明，平均速度是截面上的速度分布在单位面积上的积分。截面上平均速度 U 和截面面积 A 的乘积称为体积流量 Q，即

$$Q = UA \tag{5.2.2}$$

体积流量与流体密度的乘积称为质量流量 W，即

$$W = \rho UA \tag{5.2.3}$$

5.2.2 一维连续性方程

定常流动时，(5.1.3)式右端为零，得到一维定常流动连续性方程

$$\rho_1 U_1 A_1 = \rho_2 U_2 A_2 \tag{5.2.4}$$

当密度 ρ 沿程不变化时，由上式可得不可压缩流体定常流动的一维连续性方程

$$U_1 A_1 = U_2 A_2 \tag{5.2.5}$$

5.2.3 一维连续性方程的应用

(1)水箱支管定常流动

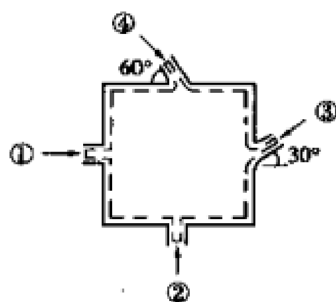


图 5.5 水箱支管定常流动

水流定常流过图 5.5 所示四支管水箱。支管①的截面 $A_1 = 0.02\text{m}^2$，支管②的截面 $A_2 = 0.05\text{m}^2$。从支管③流出的质量流量为 57kg/s，由支管④流进的体积流量为 $0.03\text{m}^3/\text{s}$，由支管①流进的水流速度为 $U_1 = 3\text{m/s}$。假定所有管截面上的水流速度均匀，水的密度为 $\rho = 1\,000\text{kg/m}^3$，试求从支管②处截面流出的水流速度 U_2。

取图中的虚线为控制面。水流定常流过图示装置，根据连续性方程(5.2.4)，通过各截面流进和流出的水流量代数和为零。依据题意，由支管①流进的质量流量为

$$W_1 = \rho A_1 U_1 = 1\,000 \times 0.02 \times 3\text{kg/s} = 60\text{kg/s}$$

从支管③流出的质量流量为

$$W_3 = \rho A_3 U_3 = 57\text{kg/s}$$

由支管④流进的质量流量为

$$W_4 = \rho A_4 U_4 = \rho Q_4 = 1\,000 \times 0.03\text{kg/s} = 30\text{kg/s}$$

根据质量守恒原理，从支管②处截面流出的质量流量为

$$W_2 = \rho A_2 U_2 = W_1 + W_4 - W_3 = 60\text{kg/s} + 30\text{kg/s} - 57\text{kg/s} = 33\text{kg/s}$$

于是得到从支管②处截面流出的水流速度为

$$U_2 = W_2/(\rho A_2) = [33/(1\,000 \times 0.05)]\text{m/s} = 0.66\text{m/s}。$$

(2)压力储罐初始出流

在体积为 0.05m^3 的储罐内，装有绝对压力为 800kPa、温度为 15℃ 的空气。在时间 $t = 0$ 时，空气从截面积为 65mm^2 的阀孔放出，瞬时的速度为 311m/s、密度为 6.13kg/m^3。假定储罐内其余部分的气体密度是均匀的。试确定空气从阀孔放出瞬时($t = 0$)储罐内气体密度的瞬时变化率。

取图 5.6 中的虚线为控制体积 V 的控制面。空气从阀孔排出瞬时，通过控制面输入和输出的物质通量之差等于控制体内空气质量的变化率。排出空气的速度为 U_0，密度为 ρ_0，阀孔

截面积为 A_0，根据连续性方程(5.1.3)有

$$\frac{\partial\int_V \rho \mathrm{d}V}{\partial t} = -\rho_0 U_0 A_0$$

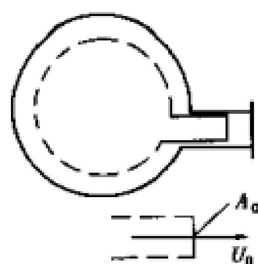


图 5.6　储罐初始出流

储罐内气体密度 ρ 是均匀的，与 V 无关，即密度 ρ 只是时间的函数，可将上式改写为

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t} = -\rho_0 U_0 A_0$$

式中储罐内控制体积 V 与时间无关，于是

$$V\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 U_0 A_0$$

即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\rho_0 U_0 A_0}{V}$$

将有关数据代入上式，得到 $t=0$ 时储罐内气体密度的瞬时变化率为

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{t=0} = -\frac{\rho_0 U_0 A_0}{V} = -\frac{6.13\times 311\times\frac{65}{10^6}}{0.05}\mathrm{kg/(m^3\cdot s)} = -2.48\mathrm{kg/(m^3\cdot s)}$$

所得结果表明储罐内气体密度随时间增长而减小。

5.3　伯努利方程及其应用

如果流体流动系统中没有加热或冷却，可以忽略流体粘性，流体的密度不变，那么这种流体系统是理想、不可压缩的等熵流动系统，其内能保持不变。对这种系统的能量衡算，只需要进行机械能衡算。这种情况下进行机械能衡算的能量方程是伯努利方程。在不可压缩重流体情形下，伯努利方程是运动方程的第一积分的自然结果，它是水利学中最重要的能量关系表达式，在整个流体力学中也占据重要地位。

5.3.1　伯努利积分和拉格朗日积分

如果流体是正压的且质量力有势，则

$$\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p = \mathrm{grad}\Pi, \boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\ \hat{V} \tag{5.3.1}$$

其中压力势 $\Pi = \int\frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)}$；$\hat{V}$是质量力势。

理想正压流体在有势质量力作用下，其运动方程在定常流动情况下积分称为伯努利积分；在无旋流动情况下积分称为拉格朗日积分。这两个在特殊条件下得到的第一积分，可以直接导出描述流体在重力场中机械能守恒的伯努利方程。

(1)兰姆-葛罗米柯形式的运动方程

理想流体的运动方程为

$$\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \rho \boldsymbol{F} - \mathrm{grad}p \tag{5.3.2}$$

根据场论基本公式,变位加速度可以写为

$$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = \mathrm{grad}\frac{u^2}{2} + \mathrm{rot}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} \tag{5.3.3}$$

上式将变位加速度分开写成位势部分和涡旋部分。将(5.3.3)式代入运动方程(5.3.2)式,得到理想流体兰姆-葛罗米柯形式的运动方程

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \mathrm{grad}\frac{u^2}{2} + \mathrm{rot}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}\right) = \rho \boldsymbol{F} - \mathrm{grad}p \tag{5.3.4}$$

如果流体正压且质量力有势,则将(5.3.1)式代入(5.3.4)式,得到理想正压流体且质量力有势的运动方程为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \mathrm{grad}\left(\frac{u^2}{2} + \Pi + \tilde{V}\right) + \mathrm{rot}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = 0 \tag{5.3.5}$$

(2)伯努利(Bernoulli)积分

理想正压流体且质量力有势,在定常流动$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=0$情况下运动方程(5.3.5)式为

$$\mathrm{grad}\left(\frac{u^2}{2} + \Pi + \tilde{V}\right) + \mathrm{rot}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = 0 \tag{5.3.6}$$

令流线 ψ 的切线单位矢量为

$$\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{u}}{u}$$

将(5.3.6)式两边对切线单位矢量 $\boldsymbol{s}$ 作数积,得

$$\boldsymbol{s} \cdot \mathrm{grad}\left(\frac{u^2}{2} + \Pi + \tilde{V}\right) + \frac{\boldsymbol{u}}{u} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = 0 \tag{5.3.7}$$

即

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u^2}{2} + \tilde{V} + \Pi\right) = 0$$

积分,得

$$\frac{u^2}{2} + \tilde{V} + \Pi = C(\psi) \tag{5.3.8}$$

式中 $C(\psi)$ 是积分常数,沿同一条流线 ψ 取同一常数值,在不同流线上可以取不同的值。(5.3.8)式称为伯努利积分。

(3)拉格朗日积分

理想正压流体且质量力有势,运动方程在无旋流动 $\mathrm{rot}\boldsymbol{u}=0$ 的情况下存在速度势 φ,使

$$\boldsymbol{u} = \mathrm{grad}\varphi \tag{5.3.9}$$

将(5.3.9)式代入运动方程(5.3.5)式,得

$$\frac{\partial \mathrm{grad}\varphi}{\partial t} + \mathrm{grad}\left(\frac{u^2}{2} + \Pi + \tilde{V}\right) = 0 \tag{5.3.10}$$

式中

$$\frac{\partial \mathrm{grad}\varphi}{\partial t} = \mathrm{grad}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

于是,(5.3.10)式变为

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{u^2}{2}+\Pi+\widetilde{V}\right)=0 \tag{5.3.11}$$

积分,得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{u^2}{2}+\widetilde{V}+\Pi=f(t) \tag{5.3.12}$$

式中$f(t)$是由边界条件确定的时间t的任意函数。对于某一时刻,$f(t)$在整个流场中取同一数值。(5.3.12)式称为拉格朗日积分。

(4)伯努利-拉格朗日积分

如果流体的运动是定常的,则拉格朗日积分(5.3.12)式可变为伯努利-拉格朗日积分

$$\frac{u^2}{2}+\widetilde{V}+\Pi=C \tag{5.3.13}$$

它和伯努利积分具有相同的形式。不过积分常数C在整个流场中取同一常数值,而伯努利积分中的积分常数$C(\psi)$只在同一条流线上取同一常数值,在不同流线上可以取不同的值。

(5)理想绝热可压缩流体的伯努利积分

对于理想绝热的可压缩流体情形,压力和密度的关系为

$$\frac{p}{\rho^\gamma}=\vartheta^\gamma(\psi) \tag{5.3.14}$$

于是

$$\frac{1}{\rho}=\vartheta/p^{\frac{1}{\gamma}} \tag{5.3.15}$$

压力函数为

$$\Pi=\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=\int\frac{\vartheta(\psi)\,\mathrm{d}p}{p^{1/\gamma}}=\vartheta(\psi)\,\frac{p^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} \tag{5.3.16}$$

将上面的压力函数代入前面提到的伯努利积分得

$$\frac{u^2}{2}+\widetilde{V}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=C(\psi) \tag{5.3.17}$$

上式是理想绝热可压缩流体的伯努利积分。

如果忽略外力,上式变成

$$\frac{u^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=C(\psi) \tag{5.3.18}$$

上式将压力、密度和速度联系了起来。

5.3.2　伯努利方程

(1)伯努利方程

对于不可压缩流体,压力势和质量力势分别为

$$\Pi=\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)}=\frac{p}{\rho},\widetilde{V}=gz \tag{5.3.19}$$

伯努利积分可以写为

$$\frac{u^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}=C(\psi) \tag{5.3.20}$$

伯努利-拉格朗日积分可以写为

$$\frac{u^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = C \tag{5.3.21}$$

(5.3.20)式和(5.3.21)式称为伯努利方程。(5.3.20)式是对定常有旋运动写出的,其积分常数 $C(\psi)$ 只在同一条流线上才取同一常数值;(5.3.21)式是对定常无旋运动写出的,其积分常数 C 在整个流场中取同一常数值。

(2)伯努利方程的物理意义和几何意义

伯努利方程(5.3.20)是能量守恒表达式,左边各项代表单位质量的动能、势能和压力能,右边积分常数 $C(\psi)$ 表示总能量(动能、势能和压力能的总和)在流线上守恒。

以重力加速度 g 除方程(5.3.20)中各项得

$$\frac{u^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = C_1(\psi) \tag{5.3.22}$$

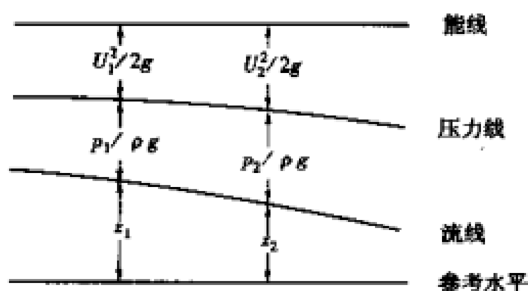


图 5.7 流线、压力线和能线

式中各项都是长度量纲。(5.3.22)式的几何意义可用图 5.7 说明。(5.3.22)式的第一项代表流体质点在真空中以初速铅直向上运动能达到的位置高度,称为速度头;第二项代表流体质点在流线上所在的位置即几何高度,称为位势头;第三项相当于液柱底面上压力为 p 时的液柱压力高度,称为压力头。根据伯努利方程(5.3.22)式,速度头、位势头和压力头三者之和沿流线不变,说明总水头线(总能线)是一条水平线。如果在流场中取一条流线,参见图 5.7,流线距参考水平面的高度为 z。从流线上各点开始铅直向上截取相应的长为 $p/\rho g$ 的线段,连接线段上端得到一条称为压力线的曲线。再从压力线上各点开始,向上截取相应的长为 $U^2/2g$ 的线段,连接线段上端便得到总水头线(能线)。

如果重力可以忽略,伯努利方程(5.3.22)式简化为

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C_1(\psi) \tag{5.3.23}$$

上式给出了速度和压力之间的关系。(5.3.23)式表明,流速大的地方压力小,流速小的地方压力大。

5.3.3 伯努利方程的应用

(1)小孔出流

盛满水的大容器器壁开有一小孔 B,孔中心距离水面 A 为 h,如图 5.8 所示。水从小孔排出流入大气,求小孔射流的流速 U_B。

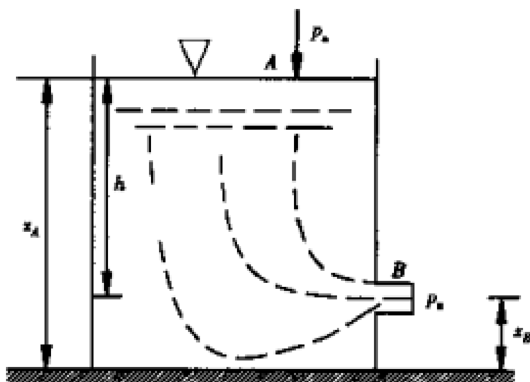


图 5.8 小孔射流

设水的自由液面 A 处的速度为 U_A。水面 A 和小孔 B 的射流都受大气压 p_a 作用。以容器底面为位置基准,水面 A 处的高度为 z_A,小孔 B 的高度为 z_B。经过小孔 B 的流线都通到水面 A 处,对其中一条流

线列写的伯努利方程为

$$gz_A + \frac{p_a}{\rho} + \frac{U_A^2}{2} = gz_B + \frac{p_a}{\rho} + \frac{U_B^2}{2}$$

如果容器截面面积为 S_A，小孔的截面面积为 S_B，根据连续性方程，有 $S_A U_A = S_B U_B$。由于 $S_A \gg S_B$，即 $U_A \ll U_B$，伯努利方程中 $U_A^2/2$ 与 $U_B^2/2$ 相比可以忽略。于是，

$$U_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)} = \sqrt{2gh} \tag{5.3.24}$$

上式表明了位能和动能的相互关系，即由已知的位差可以计算出流体的流速，按已知的流速可以确定流体需要的位差。(5.3.24)式通常称为托里切利公式。

(2) 驻点压力

假如一均匀的气流从前方远处以 V_∞ 等速度定常地绕过一物体，如图 5.9 所示。气流受阻后，在物体前沿中心 o 处滞止为零，o 点叫做驻点，该点压力 p_o 称为驻点压力。设前方未受扰动的气流压力和速度分别为 p_∞ 与 V_∞。

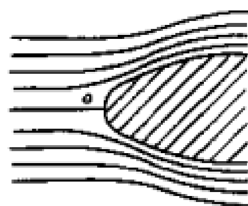


图 5.9　驻点压力

对通过驻点 o 的流线 ψ_o 应用伯努利方程，忽略重力有

$$\frac{p_o}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2}V_\infty^2 \quad 或 \quad p_o = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \tag{5.3.25}$$

式中 p_∞ 称为静压，$\rho V_\infty^2/2$ 称为动压，驻点压力 p_o 称为总压。总压是静压和动压之和。

(3) 烟囱内烟气流速

一高为 h(m) 的烟囱，烟囱顶端大气压为 p_a，在烟囱高度范围内大气平均密度为 ρ_a，烟囱内烟气平均密度为 ρ_s，如图 5.10 所示。若忽略烟气流动时的阻力，试计算烟气在烟囱内的流速。

以烟囱下端水平烟道的轴线 0—0 为基准面，在 Ⅰ—Ⅰ 截面和 Ⅱ—Ⅱ 截面之间列伯努利方程

$$\frac{p_a + gh\rho_a}{\rho_s} + \frac{U_1^2}{2} = \frac{p_a + g(h - h_2)\rho_a}{\rho_s} + \frac{U_2^2}{2} + h_2 g$$

因为 $U_1 \ll U_2$，上式简化为

$$\frac{p_a + gh\rho_a}{\rho_s} = \frac{p_a + g(h - h_2)\rho_a}{\rho_s} + \frac{U_2^2}{2} + h_2 g$$

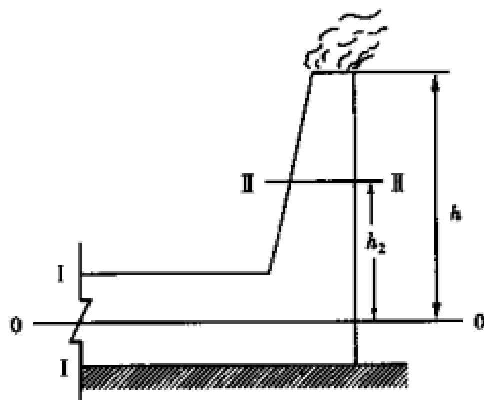


图 5.10　烟气流速

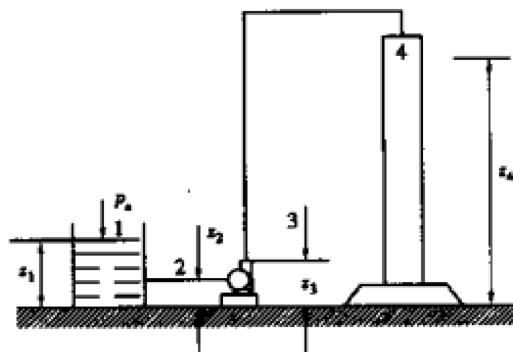


图 5.11　水泵输水功率

由上式可得烟囱内烟气流速为

$$U_2=\sqrt{\frac{2gh(\rho_a-\rho_s)}{\rho_s}}$$

(4)水泵输水功率

如图5.11所示，从水槽向水塔送水，采用输水泵作为动力。已知流量为$42m^3/h$，系统的能量损失为19Nm/kg，$z_1=2m$，$z_4=18m$，水的密度为$\rho=1\ 000kg/m^3$，管道内径为$\phi 94.5mm$。

在截面1和2之间列伯努利方程（设截面1和2之间的能量损失为$h_{f_{1-2}}$）

$$\frac{p_a}{\rho}+z_1g+\frac{U_1^2}{2}=\frac{p_2}{\rho}+z_2g+\frac{U_2^2}{2}+h_{f_{1-2}}$$

在截面3和4之间列伯努利方程（设截面3和4之间的能量损失为$h_{f_{3-4}}$）

$$\frac{p_3}{\rho}+z_3g+\frac{U_3^2}{2}=\frac{p_4}{\rho}+z_4g+\frac{U_4^2}{2}+h_{f_{3-4}}$$

由于输水泵的进水口和出水口高度差与整个系统塔高比较是小量，可以认为$z_2\approx z_3$。另外还近似认为水槽液面速度$U_1\approx 0$。将上列两个伯努利方程相加，得

$$\frac{p_a}{\rho}+z_1g+\frac{p_3}{\rho}+\frac{U_3^2}{2}=\frac{p_2}{\rho}+\frac{U_2^2}{2}+\frac{p_4}{\rho}+z_4g+\frac{U_4^2}{2}+\sum h_f$$

其中$\sum h_f=h_{f_{1-2}}+h_{f_{3-4}}$。

输水管内流量$Q=46/3\ 600(m^3/s)$，水塔进水管截面积$A_4=0.094\ 5^2\pi/4(m^2)$，水流速度为

$$U_4=\frac{Q}{A_4}=\frac{46}{3\ 600}\times\frac{4}{0.094\ 5^2\pi}m/s=1.66m/s$$

质量流量为

$$W=\rho Q=\frac{1\ 000\times 42}{3\ 600}kg/s=12.8kg/s$$

输送单位质量流体的功率为

$$\frac{N}{W}=\left(\frac{p_3}{\rho}+\frac{U_3^2}{2}\right)-\left(\frac{p_2}{\rho}+\frac{U_2^2}{2}\right)=\frac{p_4-p_a}{\rho}+\frac{U_4^2}{2}+(z_4-z_1)g+\sum h_f=$$

$$\left[\frac{0.35\times 1.013\ 3\times 10^5}{1\ 000}+\frac{1.66^2}{2}+(18-2)\times 9.81+19\right]Nm/kg=209.6Nm/kg$$

水泵所需功率为

$$N=209.6W=209.6\times 12.8W=2\ 680W=2.68kW$$

(5)虹吸管流速和压力

图5.12所示虹吸装置中，水箱液面保持不变，虹吸水流为理想流体。求虹吸管出口流速u_2和最高点压力p_3。以虹吸管出口截面2为位置基准，以绝对压力p_a为压力基准，取$u_1=0$，在截面1和截面2之间列写伯努利方程，可得

$$u_2=\sqrt{2gH_2}$$

在截面2和截面3之间列写伯努利方程为

$$\frac{u_2^2}{2}+\frac{p_a}{\rho}=g(H_1+H_2)+\frac{p_3}{\rho}+\frac{u_3^2}{2}$$

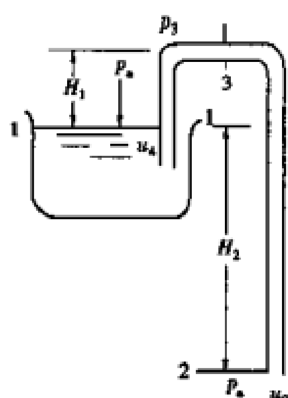


图 5.12　虹吸管流速和压力

因为虹吸管管径不变，$u_2 = u_3$，于是由上式即得

$$p_3 = p_a - \rho g(H_1 + H_2)$$

由上面的分析可知，要提高虹吸管管内液体的速度，以增大虹吸管流量，需要增加水箱液面高度 H_2。但是，增加水箱液面高度 H_2受到限制，因为随着高度 H_2增加，压力 p_3减小。当压力 p_3低于液体饱和蒸气压时，液体发生气化，虹吸管管内空将充满蒸气，产生气穴现象，虹吸作用受到破坏。

(6) **圆板间径向流动**

两块半径为 r_2的圆板水平放置，板间距离为 S，上板中心管口半径为 r_1。水流从中心管口垂直注入，在板间沿板面作径向流动，如图 5.13 所示。如果可以忽略水流进入的动量，试求板间压力随半径的变化规律。

根据连续性方程，通过任一圆周的质量流量都相等，即

$$W = \rho_1 A_1 u_1 = \rho_2 A_2 u_2$$

由于水流不可压缩，水流流过任一半径的体积流量都相等，因此体积流量可写为

$$Q = \pi r_1^2 u_1 = 2\pi r S u = 2\pi r_2 S u_2$$

式中 r 为圆板任意处的半径；u, u_1 和 u_2 分别为 r, r_1 和 r_2 处的速度，由上式得 $\frac{u}{u_2} = \frac{r_2}{2}$。以大气压为基准，$r_2$处的压力为大气压，在 r 与 r_2处列写伯努利方程

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \frac{u_2^2}{2}$$

即得

$$\frac{p}{\rho} = \frac{u_2^2 - u^2}{2} = \frac{u_2^2}{2}\left[1 - \left(\frac{r_2}{r}\right)^2\right] = -\frac{u_2^2}{2}\left[\left(\frac{r_2}{r}\right)^2 - 1\right]$$

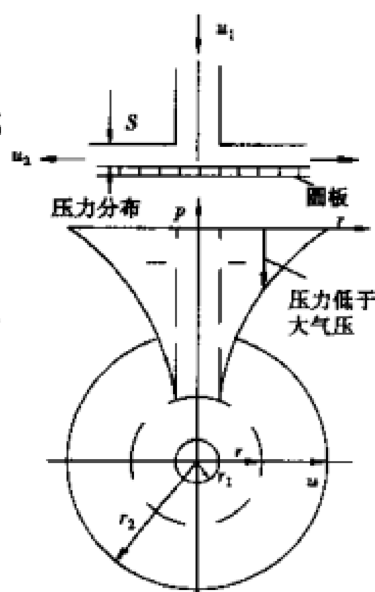


图 5.13　圆板径向流

因为 r_2恒大于 r，上式表明在任何流量下，板间压力恒为负压，即低于大气压力；随半径 r 增大，板间压力也增大，直至在 r_2处等于大气压。

5.4　动量定理和动量矩定理的应用

如果只需要了解流场边界上属于整体性的特征量，可以利用积分形式的动量定理和动量矩定理，来求感兴趣的整体性的特征量是十分便捷的。这种情况下，不需要在一定的初始条件和边界条件下去解微分形式的基本方程组。

5.4.1 动量定理和动量矩定理

第4章已经给出动量定理和动量矩定理、积分形式的动量方程和积分形式的动量矩方程的表达形式。

(1)动量定理

流体的动量定理可以表述成在任取流体体积 τ 中,流体动量的变化率等于作用在该体积上的质量力和面力之和。动量定理的表达式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\tau \rho \boldsymbol{u}\mathrm{d}\tau = \int_\tau \rho \boldsymbol{F}\mathrm{d}\tau + \int_S \boldsymbol{p}_n \mathrm{d}S \tag{5.4.1}$$

式中,$\boldsymbol{F}$ 表示作用在单位质量流体上的质量力分布函数;$\boldsymbol{p}_n$ 表示作用在流体边界单位面积上的面力分布函数。

(2)积分形式的动量方程

$$\int_\tau \frac{\partial(\rho \boldsymbol{u})}{\partial t}\mathrm{d}\tau + \int_S \rho u_n \boldsymbol{u}\mathrm{d}S = \int_\tau \rho \boldsymbol{F}\mathrm{d}\tau + \int_S \boldsymbol{p}_n \mathrm{d}S \tag{5.4.2}$$

(3)动量矩定理

在流体体积 τ 中,任取一点为力矩的参考点,$\boldsymbol{r}$ 为流体质点到该参考点的矢径。流体的动量矩定理可以表述成流体动量矩的变化率等于作用在该体积上的质量力和面力对同一参考点力矩之和。于是,动量矩定理的表达式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\tau \boldsymbol{r}\times\rho \boldsymbol{u}\mathrm{d}\tau = \int_\tau \boldsymbol{r}\times\rho \boldsymbol{F}\mathrm{d}\tau + \int_S \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_n \mathrm{d}S \tag{5.4.3}$$

(4)积分形式的动量矩方程

$$\int_\tau \left[\boldsymbol{r}\times\frac{\partial(\rho \boldsymbol{u})}{\partial t}\right]\mathrm{d}\tau + \int_S (\boldsymbol{r}\times\rho u_n \boldsymbol{u})\mathrm{d}S = \int_\tau \boldsymbol{r}\times\rho \boldsymbol{F}\mathrm{d}\tau + \int_S \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_n \mathrm{d}S \tag{5.4.4}$$

5.4.2 定常运动的动量定理和动量矩定理

对于不定常运动流体的动量方程(5.4.2)式和动量矩方程(5.4.4)式,要求出方程中 $\int_\tau \frac{\partial(\rho \boldsymbol{u})}{\partial t}\mathrm{d}\tau$ 和 $\int_\tau \left[\boldsymbol{r}\times\frac{\partial(\rho \boldsymbol{u})}{\partial t}\right]\mathrm{d}\tau$ 等体积分的值,必须求解微分形式的流体力学基本方程组,以了解体积 τ 内流动的情形。这正是阻碍人们顺利应用动量方程(5.4.2)式和动量矩方程(5.4.4)式的原因。如果流体运动是定常的,方程中 $\int_\tau \frac{\partial(\rho \boldsymbol{u})}{\partial t}\mathrm{d}\tau$ 和 $\int_\tau \left[\boldsymbol{r}\times\frac{\partial(\rho \boldsymbol{u})}{\partial t}\right]\mathrm{d}\tau$ 等项自动消失,动量方程(5.4.2)式和动量矩方程(5.4.4)式变为

$$\int_S \rho u_n \boldsymbol{u}\mathrm{d}S = \int_V \rho \boldsymbol{F}\mathrm{d}V + \int_S \boldsymbol{p}_n \mathrm{d}S \tag{5.4.5}$$

$$\int_S (\boldsymbol{r}\times\rho u_n \boldsymbol{u})\mathrm{d}S = \int_V \boldsymbol{r}\times\rho \boldsymbol{F}\mathrm{d}V + \int_S \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_n \mathrm{d}S \tag{5.4.6}$$

在上面二式中,为了明确采用控制体积方法,将体积符号 τ 改写为 V,以强调控制体积 V 一经选定后,其位置和形状便面定不变。(5.4.5)式和(5.4.6)式中的控制面可以任意选取。

如果控制面选择得好,利用动量方程(5.4.5)式和动量矩方程(5.4.6)式以及边界上的流动参数,可以得到关于整体性特征量的满意结果,而这样的结构利用别的方法是很难求得的。

应该指出，动量方程(5.4.5)式和动量矩方程(5.4.6)式是从定常运动情况下导出的，它们既适用于理想流体，也适用于粘性流体。由于定常运动的动量方程(5.4.5)式和动量矩方程(5.4.6)式被广泛应用，通常都将它们称为动量定理和动量矩定理。

动量与质量、能量不同，它是有数值大小和方向的矢量，所以计算中通常应用动量定理和动量矩定理的投影方程形式。

5.4.3　动量定理的应用

(1) 小孔出流

假设流体理想不可压缩，运动定常，外力只有重力，理想流体情形下的动量定理为

$$\int_S \rho u_n \boldsymbol{u} \mathrm{d}S = \int_V \rho \boldsymbol{F} \mathrm{d}V - \int_S p \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{5.4.7}$$

其中 p 是理想流体的压力函数。流体从水平方向自容器下部的小孔射出，如图 5.14 所示，求流体自小孔射出后对容器的反作用力。

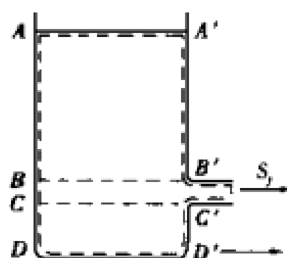


图 5.14　小孔出流

图中标出的封闭虚线表示控制面 S。由于小孔射流对容器的反作用力是水平的，所以只须考虑动量定理(5.4.7)式在水平方向 x 轴上的投影分量。x 轴方向，通过小孔最小截面 S_j 的动量为

$$\left(\int_S \rho u_n \boldsymbol{u} \mathrm{d}S\right)_x = \rho U^2 S_j \boldsymbol{x} = 2\alpha\rho g h S_B \boldsymbol{x} \tag{5.4.8}$$

其中 ρ, U 分别是最小截面 S_j 上的平均密度和平均速度，$\boldsymbol{x}$ 是 x 轴方向的单位矢量。上式中小孔射流速度 U 应用了托里切利公式(5.3.24)式；截面收缩系数 $\alpha = S_j/S_B$，S_B 是小孔在容器壁上的开孔截面。外力只有铅垂向下的重力，因此在水平分向的投影为零。作用在 x 轴方向的面力分量为

$$\left(-\int_S p \boldsymbol{n} \mathrm{d}S\right)_x = \left(-\int_S (p - p_0) \boldsymbol{n} \mathrm{d}S\right)_x \tag{5.4.9}$$

式中 p_0 是大气压，可以表示为 $\int_S p_0 \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \int_V \nabla p_0 \mathrm{d}V = 0$。图中，控制面 S 只有与容器器壁接触的 $AB, BC, CD, A'B', C'D'$ 等部分，对(5.4.9)式的积分才可能有贡献，这部分控制面积的总和用 S' 来表示。流体对容器侧面的反作用力可表示为

$$\boldsymbol{R}_x = \int_{S'} (p - p_0) \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{5.4.10}$$

容器中除小孔区域附近外，流体速度几乎为零，压力近似为静压分布。因此，可以近似认为控制面积 S' 中，只有 BC 部分的控制面积 S_{BC} 对(5.4.9)式的积分才有贡献。于是，作用在 x 轴方向的面力分量(5.4.9)式改写为

$$\int_{S_{BC}} (p - p_0) \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = -\rho g h S_B \boldsymbol{x} \tag{5.4.11}$$

于是，流体对容器侧面的反作用力为

$$\boldsymbol{R}_x = -\rho g h S_B \boldsymbol{x} \tag{5.4.12}$$

将(5.4.8)式和(5.4.12)式代入(5.4.7)式，得

$$2\alpha\rho g h S_B = \rho g h S_B$$

由上式求得收缩系数 $\alpha = 0.5$。对于圆形孔口，收缩系数 α 的实验数值在 0.61 ~ 0.64 之间。

(2)水柱冲击平板问题

宽为 a 的平面水柱以速度 $\boldsymbol{u}$ 向无穷长平板斜射，接触平板便分成两支水柱沿平板流动，流向远处后变成宽为 a_1 和 a_2 的平面水柱，如图 5.15 所示。设流体是理想不可压缩流体，流动定常，水柱速度 $\boldsymbol{u}$ 很大，可以忽略重力。求水柱对平板的压力及压力作用点。

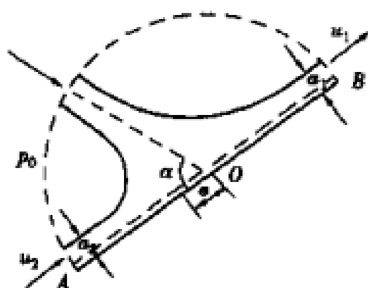


图 5.15　水柱冲击平板

设三支水柱在远处的速度都是均匀的，且自由面上的压力都是大气压。入射水柱的中心轴线与平板的交点为 O，夹角为 α。可以判断入射水柱作定常无旋运动，忽略重力后的伯努利-拉格朗日积分为

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C$$

可以证明，三支水柱在远处的速度大小均为 u，压力均为 p_0。

取包括无穷远处三支水柱横截面在内的控制面 S（图中用虚线表示控制面）。通过控制面 S 的动量为

$$\int_S \rho u_n \boldsymbol{u} \mathrm{d}S = -\rho a u \boldsymbol{u} + \rho a_1 u \boldsymbol{u}_1 + \rho a_2 u \boldsymbol{u}_2 \tag{5.4.13}$$

其中 a_1, a_2, a_3 和 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ 分别是三支水柱在远处的横截面面积和速度矢量。

作用在控制面 S 上的力为

$$-\int_S p\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int_S (p - p_0)\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = -\int_{AOB}(p - p_0)\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{5.4.14}$$

而流体作用在平板上的力为

$$\boldsymbol{P} = \int_S p\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{5.4.15}$$

将(5.4.13)式和(5.4.15)式代入动量定理(5.4.7)式，得到入射水柱对平板的压力

$$\boldsymbol{P} = \rho a u \boldsymbol{u} - \rho a_1 u \boldsymbol{u}_1 - \rho a_2 u \boldsymbol{u}_2 \tag{5.4.16}$$

上式在垂直平板的方向投影，得到

$$P = \rho a u^2 \sin\alpha \tag{5.4.17}$$

在平行平板的方向投影，得到

$$0 = \rho a_1 u^2 - \rho a_2 u^2 - \rho a u^2 \cos\alpha \tag{5.4.18}$$

(5.4.17)式给出了入射水柱对平板的压力公式。(5.4.17)式表明，水柱压力与动能 ρu^2，水柱横截面积 a 和入射角的正弦 $\sin\alpha$ 成正比。由(5.4.18)式可得

$$a_1 - a_1 = a\cos\alpha \tag{5.4.19}$$

三支水柱在远处的速度大小均为 u，因此连续性方程为

$$a_1 + a_2 = a \tag{5.4.20}$$

由(5.4.19)和(5.4.20)式可以解出

$$a_1 = \frac{1 + \cos\alpha}{2}a, \quad a_2 = \frac{1 - \cos\alpha}{2}a \tag{5.4.21}$$

利用动量矩定理可以求得合力作用点。以 O 点为矩心，水柱的动量矩方程为

$$\rho a_1 u^2 \frac{a_1}{2} - \rho a_2 u^2 \frac{a_2}{2} = pe \tag{5.4.22}$$

其中 e 是压力作用点到 O 点的距离。将(5.4.21)式代入(5.4.22)式可得压力作用点位置为

$$e = \frac{1}{2}a\cos\alpha \tag{5.4.23}$$

(3)料浆冲力计算

将料浆从容器底部的出口排出(图 5.16),冲击到一平板上。料浆容器内压力为 $6.9\times10^5\ \mathrm{N/m^2}$(表压),料浆密度为 $1\ 041.3\mathrm{kg/m^3}$。如果忽略摩擦影响和容器内料浆的动能,试计算浆液排出速度和对平板的作用力。

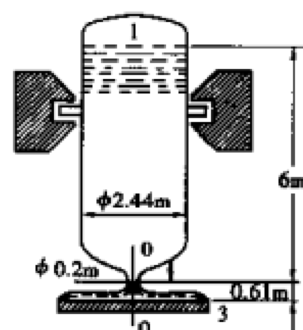


图 5.16　料浆冲力

在浆液上部液面 1 与容器底部的出口 2 之间列写伯努利方程

$$\frac{1}{2}u_2^2 - gz_1 + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0$$

由上式可求得浆液排出速度,代入数据计算得到

$$u_2 = \sqrt{2\left(\frac{p_2 - p_1}{\rho} + gz_1\right)} = \sqrt{2\times\left(\frac{6.9\times10^5}{1\ 041.3} + 9.81\times6\right)} \approx 37.2(\mathrm{m/s})$$

浆液的质量流量为

$$W = \rho uA = 1\ 041.3\times37.2\times\frac{\pi\times(0.2)^2}{4} = 1\ 216.3(\mathrm{kg/s})$$

在料口 2 与平板 3 之间沿 0—0 轴线列动量方程

$$F = u_2W = 37.2\times1\ 216.3\mathrm{N} \approx 45\ 246\mathrm{N}$$

(4)弯管受力

如图 5.17 所示,流体通过 90°弯管作定常流动。由于流体流动过程中,流体动量发生变化引起弯管受力。试求弯管受到的作用力。

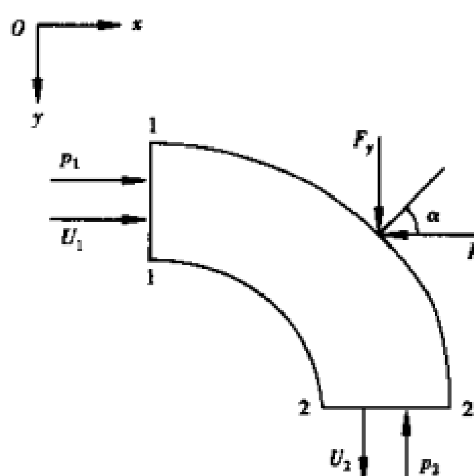


图 5.17　弯管受力

F_x 和 F_y 分别表示弯管对流体的作用力在 x 和 y 方向的投影。弯管内流体定常流动的流量为

$$W = \rho U_1A_1 = \rho U_2A_2 \tag{5.4.24}$$

注意到 $U_{2x}=0, U_{2y}=U_2, U_{1x}=U_1, U_{1y}=0$,于是,动量方程的投影形式可表示为

$$-F_x + p_1A_1 = 0 - WU_1 \tag{5.4.25}$$

$$F_y - p_2A_2 = WU_2 - 0 \tag{5.4.26}$$

由(5.4.25)和(5.4.26)式可求得弯管对流体的作用力

$$F_x = WU_1 + p_1A_1, F_y = WU_2 + p_2A_2 \tag{5.4.27}$$

或

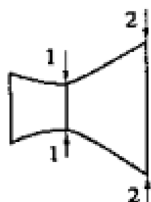
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \alpha = \arctan\frac{F_x}{F_y} \tag{5.4.28}$$

根据作用与反作用定律，弯管受到流体的反作用力与(5.4.28)式表示的力，大小相等，方向相反。

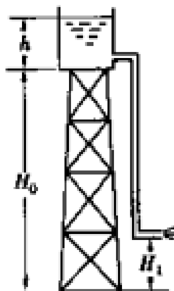
习　　题

5.1　密度为ρ的不可压缩理想流体定常流过一收缩管道，管道断面1和2处的面积分别为S_1和S_2，压力为p_1和p_2，如图所示。如果忽略质量力的作用，试证明管道内的流量为

$$Q = \frac{S_1 S_2}{\sqrt{S_2^2 - S_1^2}}\sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}}$$



题5.1附图



题5.2附图

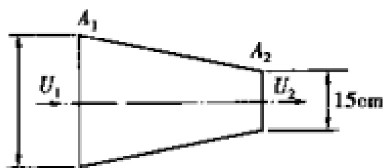
5.2　水塔的圆柱形蓄水箱底面距离地面高度$H_0 = 20$m，水箱半径$R = 2$m，蓄水深度$h = 1$m。如果截面积为2cm²的水龙头在高度$H_1 = 5$m的位置放水，问：全部放完水箱中的水需要多少时间？（答案：$t = 3.69 \times 10^3$s）

5.3　水箱内装满水，水面距离箱底高为h。如果在箱壁上开孔让水流射出，问在箱壁上什么位置开孔使水射得最远？（答案：距离箱底高为$h/2$处开孔）

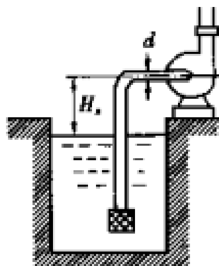
5.4　证明理想不可压缩均质流体作定常无旋运动，在重力作用下，压力p满足不等式

$$\triangle p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} < 1$$

5.5　水平直管的直径从30cm逐渐收缩为15cm，流过渐缩管的水流在大直径端的压力$p_1 = 29.4 \times 10^4 \mathrm{N/m^2}$，速度$U_1 = 3$m/s，如果忽略摩擦，试求作用在管上的纵向总推力$F$。（答案：$F = 14\ 854$N）



题5.5附图



题5.6附图

5.6　离心式水泵利用一内径 $d=150\text{mm}$ 的吸水管以 $Q=60\text{m}^3/\text{h}$ 的流量从一水槽中吸水，并将水送至压力箱。设装在水泵与吸水管接头上的真空计指示出负压值为 39 997Pa。如果不计水力损失，试求水泵的吸水高度 H_s。(答案：$H_s=4.02\text{m}$)

5.7　空气射流从喷嘴射出，射到与喷嘴成直角的壁面上。壁面上装置的测压计测得射流压力读数高于大气压 466.6Pa。求空气离开喷嘴时的速度 U 的近似值(空气为标准状态)。(答案：$U=19\text{m/s}$)

5.8　90°的渐缩弯管放置在水平面上，管径 $d_1=15\text{cm}$，$d_2=7.5\text{cm}$，人口处进水流平均速度 $u_1=2.5\text{m/s}$，静压 $p_1=6.86\text{Pa}$(计示意压强)。如果不计能量损失，试求支撑弯管保持位置不变所需的水平力 F。(答案：$F=1\ 428\text{N}$)

5.9　一段橡胶水管的一端连接在压力箱内，压强 170kPa，打开水管另一端向大气喷水，设水柱成单股水流射出，忽略空气阻力，求水流喷出后离开喷水管口所能达到的最大高度 h。(答案：$h=17.3\text{m}$)

5.10　有一内径为 20cm 的输液管道，输送相对密度为 0.85 的液体，管截面上的流速是 2m/s，求流至管道内径为 5cm 的管道内后，求该管道截面上的质量流量 W 以及流速 U。(答案：$W=53.4\text{kg/s}$，$U=32\text{m/s}$)

第 6 章

理想不可压缩流体的运动

为简化对理想流体的运动分析，根据理想流体的运动学特性，可以将理想流体的运动分为无旋运动和有旋运动两大类。有旋运动的运动学和动力学性质，为判别运动有旋还是无旋提供了依据。

本章在介绍二维运动时，引进了流函数的概念；介绍无旋运动时，引进了势函数的概念。流函数和势函数是描述流体流动行为的重要概念。求解流体无旋运动问题，一般是通过解运动学方程（连续性方程）和动力学方程（运动方程），去确定流场的速度分布和压力分布。在解决实际问题时，利用某些基本无旋运动解的叠加方法是一条求解的简便途径。最后讨论了在工程中具有重要意义的有环量的无旋运动和马格努斯效应。

6.1 理想不可压缩流体运动基本方程

描述流场结构的基本物理量是速度 u（其三个分量为 u_x, u_y, u_z）和压力 p。它们在空间的分布，要服从基本微方分程组。对于理想流体，基本微方分程组是连续性方程和欧拉运动微方分程。显然，分析理想流体的流动要比分析粘性流体的流动容易得多。

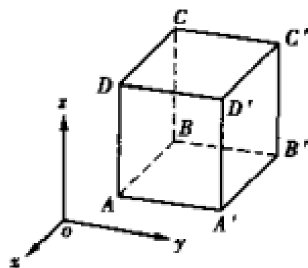


图 6.1 立方体微元质量守恒

6.1.1 连续性方程

如图 6.1 所示，取一立方体流体微元，根据质量守恒原理，单位时间内流体流进和流出该微元的质量之差，应等于单位时间内该微元中物质的增量，即

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho u_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho u_y + \frac{\partial}{\partial z}\rho u_z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{6.1.1}$$

整理上式，得到下面形式的三维运动连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + u_y\frac{\partial\rho}{\partial y} + u_z\frac{\partial\rho}{\partial z} = -\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \tag{6.1.2}$$

其中，等式左边是密度的随体导数，即

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+u_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+u_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+u_z\frac{\partial\rho}{\partial z} \tag{6.1.3}$$

于是,三维运动的连续性方程(6.1.2)式可写成

$$\frac{d\rho}{dt}=-\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \tag{6.1.4}$$

上式表明,密度的变化等于密度和体积变化的乘积。

连续性方程(6.1.4)的矢量形式为

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\mathrm{div}\boldsymbol{u}=0 \tag{6.1.5}$$

或

$$\frac{d\rho}{dt}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u})=0 \tag{6.1.6}$$

对于不可压缩流体,密度是常数,$d\rho/dt=0$,(6.1.4)式变为

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \tag{6.1.7}$$

上式是不可压缩流体的连续性方程。式中每一项代表相应坐标方向的线变速率,即

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}=\dot{\varepsilon}_x,\quad \frac{\partial u_y}{\partial y}=\dot{\varepsilon}_y,\quad \frac{\partial u_z}{\partial z}=\dot{\varepsilon}_z$$

因此,(6.1.7)式表示流体不可压缩,其物理意义是三个坐标方向线变效率之和为零,即

$$\dot{\varepsilon}_x+\dot{\varepsilon}_y+\dot{\varepsilon}_z=0 \tag{6.1.8}$$

连续性方程(6.1.6)在柱坐标系中的形式为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=0 \tag{6.1.9}$$

球坐标系中的连续性方程为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\rho r^2 v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho\sin\theta v_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial\varphi}=0 \tag{6.1.10}$$

6.1.2 欧拉方程

作用于运动流体上的外力分为两类,一类是作用于整个流体体积上的力,称为彻体力;另一类是作用于流体表面上的力,称为表面力。作用于理想流体的表面力沿流体表面的法线方向。因此,理想不可压缩流体单位表面上的作用力是压力,其受力状态与静止流体相同。在静止流体中,作用于微元体上的各力彼此平衡。在理想不可压缩流体运动中,微元体上的作用力之和等于微元体质量与其运动加速度的乘积,即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\dfrac{\partial u_x}{\partial z}=F_x-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\dfrac{\partial u_y}{\partial z}=F_y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\dfrac{\partial u_z}{\partial z}=F_z-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}\end{cases} \tag{6.1.11}$$

其中,F_x,F_y,F_z 是彻体力在 x,y,z 方向上的分量。上面的方程是理想流体的运动方程,称为欧

拉方程。

欧拉方程在柱坐标系中的形式为

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta^2}{r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)=\rho F_r-\frac{\partial p}{\partial r} \tag{6.1.12a}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}-\frac{u_r u_\theta}{r}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)=\rho F_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} \tag{6.1.12b}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=\rho F_z-\frac{\partial p}{\partial z} \tag{6.1.12c}$$

欧拉方程在球坐标系中的形式为

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{u_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}-\frac{u_\theta^2+u_\varphi^2}{r}\right)=\rho F_r-\frac{\partial p}{\partial r} \tag{6.1.13a}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}+\frac{u_r u_\theta}{r}-\frac{u_\varphi^2\cot\theta}{r}\right)=\rho F_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} \tag{6.1.13b}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u_\varphi u_r}{r}+\frac{u_\varphi u_\theta}{r}\cot\theta\right)=\rho F_\varphi-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi} \tag{6.1.13c}$$

如果不可压缩流体作定常运动,且彻体力有势 W,即

$$F_x=-\frac{\partial W}{\partial x},\quad F_y=-\frac{\partial W}{\partial y},\quad F_z=-\frac{\partial W}{\partial z} \tag{6.1.14}$$

于是,欧拉方程(6.1.11)式沿流线 s 的积分便得到伯努利方程

$$\frac{u^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}=C_s \tag{6.1.15}$$

流体作无旋流动时,欧拉方程(6.1.11)式积分可得

$$\frac{u^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}=C \tag{6.1.16}$$

上式虽然和(6.1.15)式形式一样,但是,(6.1.15)式中的常数 C_s 仅对一条流线而言;而(6.1.16)式中的常数 C 表示不因流线不同而变化。

6.1.3 理想不可压缩流体基本方程组

将不可压缩流体的连续性方程(6.1.7)和理想不可压缩流体的运动方程(6.1.11)组合在一起,得到理想不可压缩流体的运动方程组,即

$$\begin{cases}\mathrm{div}\boldsymbol{u}=0\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}-\dfrac{1}{\rho}\nabla p\end{cases} \tag{6.1.17}$$

初始条件是当 $t=t_0$ 时

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}),\quad p=p(\boldsymbol{r}) \tag{6.1.18}$$

边界条件为

$$\left.\begin{array}{ll}\text{1) 在固体壁面上} & u_n=0\\ \text{2) 在无穷远处} & \boldsymbol{u}=\boldsymbol{U}_\infty\end{array}\right\} \tag{6.1.19}$$

方程组(6.1.17)虽然有了很大简化,但是仍然是非线性的,速度 $\boldsymbol{u}$ 和压力 p 互相影响,求解方程组(6.1.17)相当难。如果运动无旋,方程组(6.1.17)将进一步得到重大简化。

6.1.4 理想不可压缩流体无旋流动基本方程组

若流体作无旋运动，$\mathrm{rot}\boldsymbol{u}=0$，存在速度势 φ，使

$$\boldsymbol{u} = \mathrm{grad}\,\varphi \tag{6.1.20}$$

将上式代入方程组(6.1.17)中的连续性方程，得

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \Delta\varphi = 0 \tag{6.1.21}$$

方程(6.1.21)是一个二阶线性偏微分方程，通常称为拉普拉斯方程。拉普拉斯方程在直角坐标系中的形式为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{6.1.22}$$

拉普拉斯方程的解具有可叠加性，这是运用拉普拉斯方程求解理想不可压缩流体无旋流动的突出优点。

如果流体理想不可压缩，重力有势，运动无旋，由欧拉方程(6.1.11)式积分，得到拉格朗日积分

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t) \tag{6.1.23}$$

当求出速度势 φ 后，可以按(6.1.20)式求出速度 $\boldsymbol{u}$，再将速度 $\boldsymbol{u}$ 代入拉格朗日积分(6.1.23)式求出压力分布 p，从而得到全部解。

理想不可压缩流体，重力有势，运动无旋，其基本方程组为

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} + \tilde{V} = f(t) \end{cases} \tag{6.1.24}$$

初始条件是当 $t=t_0$ 时

$$\mathrm{grad}\varphi = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{r}), \quad p = p_0(\boldsymbol{r}) \tag{6.1.25}$$

边界条件为

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ \text{在静止固壁上} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \\ 2)\ \text{在自由面上} & p = p_0 \\ 3)\ \text{在无穷远处} & \nabla \varphi = \boldsymbol{U}_\infty \end{array}\right\} \tag{6.1.26}$$

6.2 二维无旋运动

真实流体是有粘性的流体，而粘性流体的运动都是有旋的。在实际流体流动中，许多粘性流体的流动可以简化成理想流体的无旋运动。在数学上，处理无旋运动比处理有旋运动容易得多。对于有旋运动问题，必须面对求解非线性方程组的困难。而对于无旋运动问题，可以利用无旋的特性，通过求解线性运动方程来决定速度分布，然后再由伯努利积分决定压力。流函数和速度势函数是求解二维无旋运动问题的重要数学工具。

6.2.1　二维运动

如果流体运动时各有关物理量在空间的分布，仅依赖于两个坐标来确定，这种流动称为二维运动。

(1)流函数的定义

如果流体质点的运动速度都与已知的 x-y 平面平行，而且所有平面上的流动情况都相同，则该二维流动的流线方程为

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} \tag{6.2.1}$$

或

$$u_x dy - u_y dx = 0 \tag{6.2.2}$$

连续性方程为

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \tag{6.2.3}$$

即

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial(-u_y)}{\partial y} \tag{6.2.4}$$

上式是(6.2.2)式为全微分方程的条件。必然存在一个函数 $\psi(x,y)$，使

$$u_x dy - u_y dx = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = d\psi = 0 \tag{6.2.5}$$

式中函数 ψ 称为流函数。由上式得到流函数 ψ 的定义式为

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{6.2.6}$$

上式给出了流函数 ψ 与速度分量的关系。

当 $d\psi = 0$，ψ = 常数时，由(6.2.5)式可得

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\Big/\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{u_y}{u_x} \tag{6.2.7}$$

流线是等流函数线，给予不同的常数可以得到一簇流线。通常将与流体接触的壁面视为零流线($\psi = 0$)。

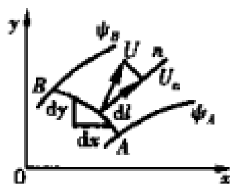


图 6.2　流函数与流量的关系

(2)流函数与流量的关系

在流体作二维运动的流场中，用任意曲线将 A、B 两点连接起来，如图 6.2.1 所示。某时刻通过该曲线上的微元线段 dl 的流量为

$$dQ = u_n \cdot dl \tag{6.2.8}$$

其中 u_n 是微元线段上 M 点处的法向速度

$$u_n = u_x \cos(n,x) + u_y \cos(n,y)$$

于是

$$dQ = [u_x \cos(n,x) + u_y \cos(n,y)]dl \tag{6.2.9}$$

结合流函数的定义式(6.2.6)可得

$$dQ = \left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dl}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dl}\right]dl = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy = d\psi \tag{6.2.10}$$

上式表明单位时间内通过曲线微元上的流量等于流函数的微分。沿 AB 曲线积分，得到流经任意曲线 AB 的流量

$$Q = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A \tag{6.2.11}$$

由(6.2.11)式可知，流经任意曲线 AB 的流量等于该曲线两个端点上的流函数之差，与曲线的形状无关。

(3)流函数方程

如果已知流函数，可以求得任意二维流场的速度场。下面讨论在有旋运动和无旋运动中确定流函数的方程。

流体在 x-y 平面内作有旋运动，旋转角速度不为零，有

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tag{6.2.12}$$

将流函数的定义式(6.2.6)代入上式，得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \Omega_z \tag{6.2.13}$$

流体在 x-y 平面内作无旋运动，旋转角速度为零，由(6.2.13)式可得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \tag{6.2.14}$$

上式是无旋运动情况下流函数服从的拉普拉斯方程。

流体二维流动引进流函数，可以通过改写方程来减少未知量，使计算简便。采用流函数绘制流网，能够进行有效的近似计算。因此，在流体力学的计算中，广泛应用流函数来表示流体的流动。需要指出的是，无论是有旋运动还是无旋运动，只要流体作二维运动，都可以采用流函数这一概念。

6.2.2　无旋运动

无旋运动的特性

如果流体运动无旋，其旋度为零。对于三维无旋运动有

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z},\quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x},\quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} \tag{6.2.15}$$

上式是全微分方程的充分必要条件。必然存在一个函数 $\phi = \phi(x,y,z)$，其全微分为

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz = d\varphi \tag{6.2.16}$$

或写成

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \tag{6.2.17}$$

比较(6.2.16)式和(6.2.17)式，可以得到速度分量和函数 ϕ 之间的关系

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{6.2.18}$$

函数 ϕ 称为速度势或势函数。(6.2.18)式是速度势 ϕ 的定义式。

由速度势 ϕ 的定义式(6.2.18)可知,速度势的方向导数是速度。速度势有类似力势的一样的特性,即利用速度势计算速度时,与起点位置无关,只决定于两点之间的势差。

无旋运动的特性是一定有势。不管无旋运动是二维的还是三维的,只要求得速度势,就可以决定流场中的速度分布。我们将具有速度势的流动称为势流。利用无旋运动有势的特点,极大地简化了对速度场的描述和计算。

6.2.3 二维无旋运动

比较速度势 ϕ 的定义式和流函数 ψ 的定义式,可以得到流体作二维无旋运动时势函数与流函数的关系

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \tag{6.2.19}$$

势函数等于常数时,即

$$\varphi(x,y) = C \tag{6.2.20}$$

可以得到等势线。在等势线上,速度势的数值是一定的。如果流函数等于常数

$$\psi(x,y) = K \tag{6.2.21}$$

可以得到流线。

联系 ϕ 和 ψ 的关系式为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{6.2.22}$$

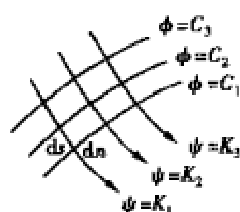


图 6.3 流网

上式称为哥西-黎曼条件。由(6.2.22)式可以证明流线和等势线正交,因为

$$\mathrm{grad}\varphi \cdot \mathrm{grad}\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \tag{6.2.23}$$

上式表明等势线 ϕ = 常数和流线 ψ = 常数正交。一组流线和一组等势线相交,形成流网,如图 6.3 所示。流网是图解法计算二维无旋流动问题时采用的基本方法。

6.2.4 势流基本方程

将速度势 ϕ 的定义式(6.2.18)代入不可压缩流体的连续性方程,得到

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{6.2.24}$$

上式称为拉普拉斯方程。拉普拉斯方程是线性方程,它的两个解的和或差也是原方程的解。例如,两个二维势流运动的速度势分别为 ϕ_1 和 ϕ_2,每一流动都满足拉普拉斯方程,即

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = 0 \tag{6.2.25}$$

和

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = 0 \tag{6.2.26}$$

将方程(6.2.25)和(6.2.26)相加,得

$$\frac{\partial^2(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial x^2}=0 \tag{6.2.27}$$

得到的新的流动,速度势为 $\phi=\phi_1+\phi_2$,仍然满足拉普拉斯方程,所以还是势流。因此,复杂流场的解可以由一些简单流场的解叠加而得到。需要指出的是,二维流函数也满足拉普拉斯方程。

求解拉普拉斯方程,关键在于求得给定的边界条件下的特解。通过上面的讨论可知,在给定的边界条件下,求解拉普拉斯方程可以得到势函数 ϕ,再由势函数能够确定速度场。因此,求解无旋运动的速度场,不必再从流体的运动方程出发,从而简化了问题的求解过程。在固体壁面上,势函数 ϕ 应满足的边界条件是法向速度分量为零,即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0 \tag{6.2.28}$$

对切向速度分量没有要求。对于用流函数 ψ 表示的绕流问题,如果已知物体壁面的形状,则要求零流线($\psi=0$)与物体壁面重合。

理想不可压缩流体无旋运动只适用于一定条件下的流体流动问题。但是,理想不可压缩流体无旋运动处理问题的方法,在流体力学中占有重要位置,是处理复杂流体流动的基础。

6.3　基本无旋流

求解无旋运动的速度场有许多方法。解决工程实际中复杂流场的问题时,可以利用拉普拉斯方程的线性性质,在满足原方程和边界条件的前提下,根据经验选用基本无旋流叠加求解。下面介绍均匀流、径向流和环流等基本无旋流的速度势和流函数。它们可以作为叠加求解复杂无旋运动问题的基本数学单元。

6.3.1　均匀流

均匀直线流动(简称均匀流)是最简单的流型,具有平行的直线流线,速度分布均匀,如图 6.4 所示。均匀流的速度分布为

$$u_x=U,\quad u_y=0 \tag{6.3.1}$$

对上式积分,可得均匀流的速度势函数和流函数

$$\varphi=Ux+C,\quad \psi=Uy+C \tag{6.3.2}$$

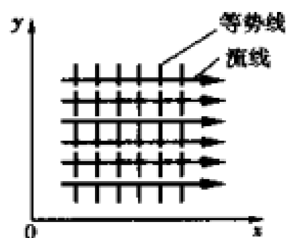


图 6.4　均匀流

其中,U 是均匀流的速度,C 是积分常数。当流体绕过物体时,远离物体表面的来流,可以近似认为是均匀流。

6.3.2　径向流

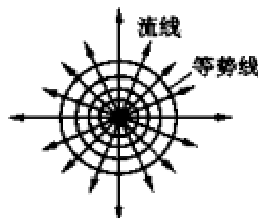


图 6.5　点源流动

流体的径向流动分为点源流动和点汇流动两种。流体以一定流量从一公共点流出,并沿径向连续、均匀、对称地向外流动,流线随着远离公共点而散开,这种径向流动称为点源流动,如图 6.5 所示。流体以一定流量从外向内流进一公共点,并沿径向连

续、均匀、对称地向公共点流动，流线随着靠近公共点而聚集在一起，这种径向流动称为点汇流动。

（1）点源流动

流体作点源流动时，离开原点相同的径向距离处，流体速度相同，而且流体流过任一以原点为圆心的圆周的流量相同。如果离开原点径向距离 r 处的径向速度为 u_r，则流体流过半径为 r 的圆周的流量（单位高度圆柱上的体积流量）为

$$Q = 2\pi r u_r \tag{6.3.3}$$

式中流量 Q 定义为点源的强度。由(6.3.3)式，径向速度可表示为

$$u_r = \frac{Q}{2\pi r} \tag{6.3.4}$$

当 $r \to 0$，$u_r \to \infty$ 时，数学上原点称为奇点，在所讨论的流场中应予以排除。排除奇点，对工程实际问题产生的影响不大。

在平面极坐标中，势函数与速度分量的关系为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = u_r = \frac{Q}{2\pi r} \tag{6.3.5}$$

流函数与速度分量的关系为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = u_\theta = 0 \tag{6.3.6}$$

积分(6.3.5)式或(6.3.6)式，忽略积分常数后，得到点源流动的势函数

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln r \tag{6.3.7}$$

和点源流动的流函数

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\theta \tag{6.3.8}$$

（2）点汇流动

点汇流动方向与点源流动形式一样，方向相反，显然二者的势函数和流函数的符号正、负相反。在(6.3.7)式和(6.3.8)式前添加上负号后，即得点汇流动的势函数

$$\varphi = -\frac{Q}{2\pi}\ln r \tag{6.3.9}$$

和点汇流动的流函数

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi}\theta \tag{6.3.10}$$

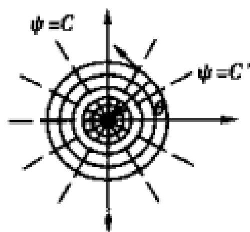


图 6.6　环流

6.3.3　环流

流线是同心圆、径向速度为零的流动，称为环流，如图 6.6 所示。在柱坐标中，无旋环流应满足的运动学条件是旋转角速度 ω_z 和径向速度 u_r 均为零，即

$$\omega_z = 0,\quad u_r = 0$$

将上述运动学条件代入极坐标旋转角速度的表达式

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(u_\theta - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\right] \tag{6.3.11}$$

得到

$$\frac{u_\theta}{r} + \frac{\mathrm{d}u_\theta}{\mathrm{d}r} = 0$$

或

$$u_\theta \mathrm{d}r = -r\mathrm{d}u_\theta \tag{6.3.12}$$

积分上式,得

$$u_\theta = \frac{K}{r} \tag{6.3.13}$$

式中 K 为常数。当 $r=0$ 时,速度为无穷大,因此,应将包括原点(奇点)在内的极小区域排除在无旋环流的讨论之外。与流线一致的任一封闭的圆周曲线的环量为

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} u_\theta r\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{K}{r} r\mathrm{d}\theta = 2\pi K$$

根据上式,常数 K 可表示为

$$K = \frac{\Gamma}{2\pi} \tag{6.3.14}$$

可见常数 K 与环量 Γ 有关。无旋运动的环量应为零,但是由(6.3.14)式得到的环量为常数。这是因为流场中包含了奇点(原点),在原点附近 $r\to 0$ 的无穷小邻域内,运动不再是无旋运动,而是环量为常数的有旋运动。于是,整个流场的环量都是由原点附近无穷小邻域的旋转所提供。因此,环流运动是有环量的无旋运动。

式(6.3.13)代表的无旋环流的速度称为诱导速度,它是圆心处无限长涡线在其周围感生的速度场,即流场中涡旋引起周围的速度变化。将(6.3.14)式确定的 K 值代入(6.3.13)式,得

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{6.3.15}$$

上式代表的流动也称为自由涡,其中环量 Γ 是涡旋强度。

速度分量的流函数表达式为

$$\begin{cases} u_\theta = \dfrac{\Gamma}{2\pi r} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r} \\ u_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \tag{6.3.16}$$

积分上式,得

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r + C \tag{6.3.17}$$

假设通过 $r=1$ 的流函数为零,则(6.3.17)式中积分常数 $C=0$,于是得到环流的流函数为

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{6.3.18}$$

式中负号表示环流沿逆时针方向。

速度分量的速度势函数表达式为

$$
\begin{cases} u_\theta = \dfrac{\Gamma}{2\pi r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} \\ u_r = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = 0 \end{cases} \tag{6.3.19}
$$

类似确定流函数的方法,可得环流的势函数为

$$
\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \tag{6.3.20}
$$

6.3.4 偶极流

重力场中无穷远处均匀来流绕物体的流动,或者静止物体在理想流体中开始运动,流体都满足理想、正压、彻体力有势的条件,根据凯尔文环量守恒定理和斯托克斯定理,流体始终作无旋运动。因此,对于理想流体绕圆柱的流动问题,可以利用拉普拉斯方程的线性性质,选择若干基本无旋流动的势函数进行叠加,求满足方程和边界条件的解。

(1)点源和点汇叠加的流场

兰金体(蛋形物体)沿其长轴方向以速度 U 在静止流体中运动,其速度势可以由点源和点汇的叠加得到。兰金体的运动如图 6.7 所示,物体前端流体不断受压而分开,物体尾后流体在让出的空间里汇合起来。在兰金体的前端,可看做有一个强度为 Q 的点源,放置在 x 轴线的 $(-a,0)$ 处,如图 6.8 所示。在兰金体的尾部,可看做有一个与点源等强度的点汇,放置在 x 轴线的 $(a,0)$ 处,从点源流出的流体都流进了点汇。



图 6.7 绕运动物体的无旋流

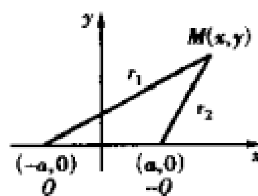


图 6.8 点源和点汇叠加

在绕兰金体运动的流动中,任一点 M 的坐标为 (x,y),M 到点源和点汇的距离为

$$
\begin{cases} r_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \\ r_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \end{cases} \tag{6.3.21}
$$

点源和点汇叠加后的流动,其势函数为

$$
\varphi = \frac{Q}{2\pi}(\ln r_1 - \ln r_2) = \frac{Q}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2} \tag{6.3.22}
$$

将(6.3.21)式代入上式,得

$$
\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}}
$$

或写成

$$
\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{4\pi}\ln\frac{(x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 - (x-a)^2}{(x-a)^2 + y^2} = \\ &\frac{Q}{4\pi}\ln\left[1 + \frac{4xa}{(x-a)^2 + y^2}\right] \end{aligned} \tag{6.3.23}
$$

上式是兰金体在静止流体中运动时的速度势函数。

(2) 偶极流

当(6.3.23)式中 a 值减小，点源和点汇彼此接近。当蛋形物体形状变化趋近于圆柱截面时，点源和点汇无限接近时得到的流动称为偶极流。偶极流也是一种基本无旋流。

当 a 趋于零时，令(6.3.23)式中的小量为

$$z = \frac{4xa}{(x-a)^2 + y^2} \tag{6.3.24}$$

将 $\ln(1+z)$ 按幂级数展开，即

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - \cdots \tag{6.3.25}$$

保留 z，去掉式中二阶小量以上的项，得

$$\ln(1+z) = z \tag{6.3.26}$$

将上式代入(6.3.23)式，得到 a 是微小量时偶极流的速度势函数

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{4xa}{(x-a)^2 + y^2} \tag{6.3.27}$$

类似地，可得到 a 是微小量时偶极流的流函数

$$\psi = -\frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{4ya}{x^2 + y^2 - a^2} \tag{6.3.28}$$

为了计算上的方便，需要将(6.3.27)式和(6.3.28)式中的微小量 a 转变成有限量的形式。为此，定义 $2Qa$ 的极限趋于一有限值 M，即

$$M = \lim_{a \to 0} 2Qa \tag{6.3.29}$$

其中 M 称为偶极矩。由偶极矩的定义式(6.3.29)可知，当点源和点汇无限接近时，a 趋于零，则强度 Q 为无穷大。

将(6.3.29)代入势函数(6.3.27)式和流函数(6.3.28)式，分别得到偶极流用偶极矩 M 表示的势函数

$$\varphi = \lim_{a \to 0} \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{4xa}{(x-a)^2 + y^2} = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \tag{6.3.30}$$

和用偶极矩 M 表示的流函数

$$\psi = \lim_{a \to 0} -\frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{4ya}{x^2 + y^2 - a^2} = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \tag{6.3.31}$$

令流函数为常数，可以得到相应的流线，即

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = C$$

或写成

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2} \tag{6.3.32}$$

上式表示流线是一簇圆周与 x 轴相切、圆心在 y 轴上且距离坐标原点为 $1/2C$ 的圆周曲线，如图 6.9 所示。

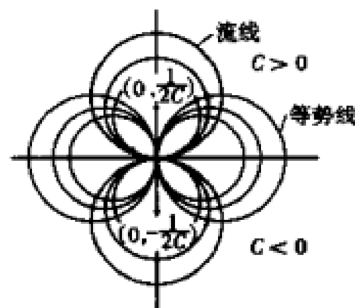


图 6.9　偶极流的流线和等势线

令势函数为常数，同样可以得到相应的等势线，即

$$y^2+\left(x-\frac{1}{2C}\right)^2=\frac{1}{4C^2} \tag{6.3.33}$$

上式表示等势线是一簇圆周与 y 轴相切、圆心在 x 轴上且距离坐标原点为 $1/2C$ 的圆周曲线，如图 6.9 所示。显然，等势线与流线正交。偶极流是用于求解绕圆柱无旋流动的基本无旋流。

6.4 理想流体绕圆柱的流动

长圆柱物体在静止流场中作匀速直线运动，在静坐标系中观察到绕圆柱的流体运动是非定常的，其速度分布如图 6.7 所示。采用固结在圆柱物体的动坐标系，在其中观察到绕圆柱的流体运动是定常的。于是，问题转化为作匀速直线流动的流体绕静止的长圆柱物体运动。

6.4.1 理想流体绕圆柱体流动

(1) 势函数和流函数

设绕半径为 r_0 的静止长圆柱物体的均匀来流是理想流体，来流速度为 U_∞，压力为 p_0。如果忽略长圆柱的端效应，将流动问题视为二维流动，可以应用均匀流和偶极流叠加求解流体绕长圆柱流动问题。将(6.3.2)式和(6.3.31)式叠加，可得绕长圆柱流动的流函数为

$$\psi=U_\infty y-\frac{M}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}=U_\infty y\left(1-\frac{M}{2\pi U_\infty}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\right) \tag{6.4.1}$$

为了确定式中偶极矩 M 的数值，令 $\psi=0$，由(6.4.1)式得到零流线方程

$$y\left(1-\frac{M}{2\pi U_\infty}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0 \tag{6.4.2}$$

由上式得

$$y=0,\quad x^2+y^2=\frac{M}{2\pi U_\infty} \tag{6.4.3}$$

流体不能穿透物体表面，绕圆柱贴附在其表面的边界流线是零流线。因此，偶极矩 M 应满足的流动边界条件为

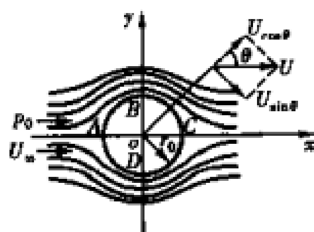


图 6.10 绕圆柱体的流动

$$\frac{M}{2\pi U_\infty}=r_0^2 \tag{6.4.4}$$

上式表明，由(6.4.3)式确定的零流线是圆心位于坐标原点、半径为 r_0 的圆，以及 ox 轴与该圆连接的两个分支，如图 6.10 所示，分支点是 A 点和 C 点。流体绕过圆柱体表面时，流线先在 A 点分开，然后在 C 点汇合。零流线可表示为

$$\begin{cases}x^2+y^2=r_0^2\\ y=0\quad(x\le -r_0, x\ge r_0)\end{cases} \tag{6.4.5}$$

于是，根据拉普拉斯方程的线性性质，由均匀流和偶极流叠加得到的流体绕圆柱体的流函数。

满足边界条件(6.4.4)式的流函数为

$$\psi=U_\infty y\left(1-\frac{r_0^2}{x^2+y^2}\right)=U_\infty\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)r\sin\theta \tag{6.4.6}$$

式中 $r \geq r_0$。同理，由均匀流和偶极流叠加得到的流体绕圆柱体的速度势，满足边界条件时为

$$\varphi = U_\infty x + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} = U_\infty x\left(1 + \frac{r_0^2}{x^2 + y^2}\right) = U_\infty \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) r\cos\theta \tag{6.4.7}$$

(2) **速度分布**

在极坐标中，流体绕经圆柱体的速度分布与速度势的关系为

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = U_\infty\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)\cos\theta \tag{6.4.8}$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -U_\infty\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)\sin\theta \tag{6.4.9}$$

当 $r = r_0$ 时，满足边界条件的速度分布为

$$\begin{cases} u_r = 0 \\ u_\theta = -2U_\infty \sin\theta \end{cases} \tag{6.4.10}$$

上式表明，圆柱体表面的速度大小为 $2U_\infty \sin\theta$，方向沿圆周切线方向，负号表示流体流动方向与 θ 角的方向相反，如图 6.10 所示。当 $\theta = 180°$ 时，A 点称为前临界点（驻点），其速度 $u_A = 0$；当 $\theta = 0°$ 时，C 点称为后临界点（驻点），其速度 $u_C = 0$。当 $\theta = 90°$ 时，速度具有最大值 $2U_\infty$，即等于无限远处来流速度的两倍。

对无限远处来流速度的投影可以作如下说明。(6.6.8)式表明，径向速度 u_r 随流体离开圆柱体轴线距离 r 增大而增大，当 $r = \infty$ 时，$u_r = U_\infty \cos\theta$。(6.6.9)式表明，切向速度 u_θ 随流体离开圆柱体轴线距离 r 增大而减小，当 $r = \infty$ 时，$u_\theta = -U_\infty \sin\theta$。

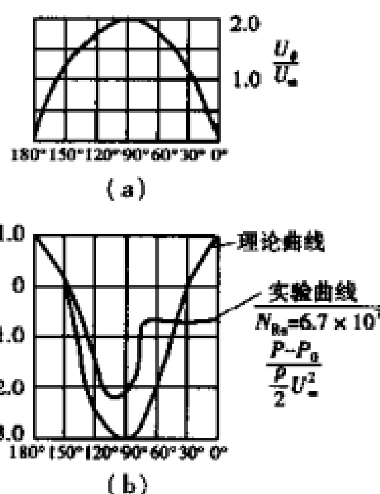


图 6.11　绕圆柱体的速度与压力分布

流体绕经圆柱体的速度分布，如图 6.11(a) 所示。

(3) **压力分布**

为求绕圆柱体流动的压力分布，如不计重力的影响，可列出下而形式的伯努利方程

$$p + \frac{\rho u^2}{2} = p_0 + \frac{\rho U_\infty^2}{2}$$

或写成

$$\frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 1 - \left(\frac{u}{U_\infty}\right)^2 \tag{6.4.11}$$

将速度分布(6.4.8)式和(6.4.9)式代入上式，得

$$\frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 1 - \frac{u_\theta^2 + u_r^2}{U_\infty^2} = -2\frac{r_0^2}{r^2}(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - \frac{r_0^4}{r^4} \tag{6.4.12}$$

在圆柱表面上 $(r = r_0)$，压力分布为

$$\frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 1 - 4\sin^2\theta \tag{6.4.13}$$

当 $\theta = 0°$ 或 $\theta = 180°$ 时，驻点 A 点和 C 点处的压力为

$$p_A = p_C = p_0 + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \tag{6.4.14}$$

当 $\theta = 90°$ 或 $\theta = 270°$ 时，圆柱表面上点 B 点和下点 D 点处的压力为

$$p_B = p_D = p_0 - \frac{3}{2}\rho U_\infty^2 \tag{6.4.15}$$

流体绕经圆柱体的压力分布，如图 6.11(b)所示。由图 6.11(b)可看出，在 $\theta = 0° \sim 90°$ 的范围内计算值与实验值相差很大，这是由于没有考虑到粘性的影响。事实上，实际流体流过圆柱体表面时，柱体表面薄层流体的粘性力影响很大。在 $\theta = 70° \sim 100°$ 的范围内，流体将与柱体发生分离，不再贴附在柱体表面上，而在柱体后缘形成涡旋区。

根据圆柱体表面的压力分布，可以计算出柱体受到流体作用力的大小。采用理想流体模型计算，圆柱体只受到来流的对称性压力，受到的阻力等于零。显然，阻力等于零的结论与实际情况相违背。圆柱体在理想流体中运动时受到的阻力等于零，但是实际情况中阻力却不等于零，著名的达朗伯悖理表述了这一矛盾现象。达朗伯悖理反映出采用理想流体模型的局限性。

(4) 附加质量

物体在静止流体中开始运动时，也会引起周围流体开始运动。物体在静止流体中以定常速度运动，所获得的动能是物体的动能 E_b 和引起运动的流体质点的动能 E_f 之和，即

$$E = E_b + E_f = \frac{1}{2}MU^2 + \frac{1}{2}\int_V \rho(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\,dxdydz \tag{6.4.16}$$

其中，U 是运动物体的速度，u_x, u_y, u_z 是由于物体运动引起流体运动的速度分量。

提供给物体运动的能量大于物体自身运动所需要的能量，就好像是增大了质量的物体在运动。以速度 U 运动、动能与 E_f 相等时所具有的物体质量叫做附加质量，用 M_f 表示。引起运动的流体质点的动能为

$$E_f = \frac{1}{2}M_f U^2 \tag{6.4.17}$$

附加质量与物体的实际质量之和，叫做物体的视质量，以 M_v 表之，即

$$M_v = M + M_f \tag{6.4.18}$$

根据物体引起流体流动的速度分量，可以计算出物体在流体中运动的附加质量。

圆柱体以速度 U 运动时，流函数为

$$\psi = -\frac{r_0^2}{r}U\sin\theta$$

速度分量为

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} = -\dfrac{r_0^2}{r^2}U\cos\theta \\ u_\theta = -\dfrac{\partial\psi}{\partial r} = -\dfrac{r_0^2}{r^2}U\sin\theta \end{cases}$$

速度的平方为

$$u^2 = u_r^2 + u_\theta^2 = \frac{r_0^4}{r^4}U^2$$

引起运动的流体质点的动能为

$$E_f = \frac{1}{2}\int_{r_0}^{\infty} \frac{r_0^4}{r^4}U^2(2\pi r\rho)\,dr = \pi\rho r_0^4 U^2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^3} =$$

$$\frac{1}{2}\pi\rho r_0^2 U^2 = \frac{1}{2}M_f U^2$$

由上式可求得圆柱体的附加质量为

$$M_f = \pi\rho r_0^2 \tag{6.4.19}$$

各种不同形状的物体具有不同的附加质量，边界条件对附加质量也有影响。所以，附加质量必须结合具体流场求取。

6.4.2　有环量的绕圆柱流动

无旋运动的环量等于零，有旋运动中环量可以作为流体旋转强弱的度量。有环量存在的绕圆柱流动，是一种无旋流动与有旋运动同时存在的复杂流场。这种流场中，因为出现环量而使运动流体对物体产生升力的现象（称为马格努斯效应），在工程中有重要的应用。

设流场中有一无限长圆柱体绕自身轴线以角速度 ω 旋转，流体由于粘性贴附在柱体表面上随之旋转，犹如一根孤立涡管，管外流体作无旋运动，管内流体以角速度 ω 作有旋运动。整个流场由于柱体自转具有环量 Γ。流体横向绕过旋转柱体的两侧时，如果绕流速度与柱体旋转速度的方向一致，则绕流速度与旋转速度叠加；绕流速度与柱体旋转速度的方向相反，则绕流速度与旋转速度部分抵消。于是，柱体两侧速度不是一样大小。如果速度较大的一侧是柱体表面的上方，根据伯努利方程，柱体表面上方低于下方的压力，柱体因此受到了横向力的作用，当横向力方向向上时称为升力。总之，流场中因为柱体旋转面具有环量，环量的出现使运动流体中的物体受到了升力。确定流场的速度分布后，柱体受到的升力可以通过其表面的压力分布求得。

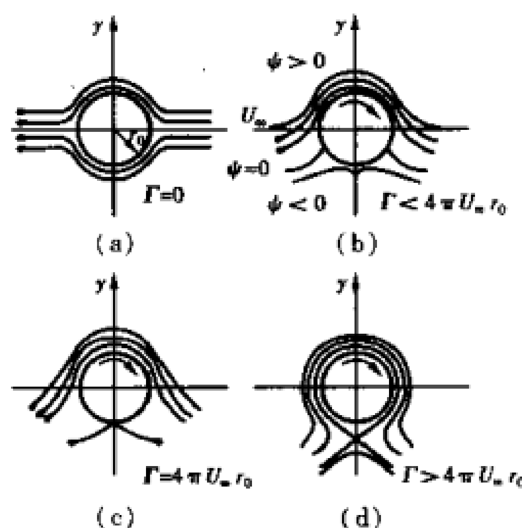


图6.12　绕有环流的圆柱体的流动

(1) 速度分布

根据流场的具体情况，通过选择基本无旋流叠加，求解拉普拉斯方程可以得到流场的速度分布。如图6.12所示，绕半径为 r_0 的圆柱体的有环量流动，不再对称于 x 轴。对于顺时针环流，流场的速度势函数由理想流体绕圆柱体的速度势(6.4.7)式和环流的速度势(6.3.20)式（式中符号相反）叠加得到，即

$$\varphi = U_\infty\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)r\cos\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \tag{6.4.20}$$

流场的流函数由理想流体绕圆柱体的流函数(6.3.6)式和环流的流函数(6.3.15)式（式中符

号相反)叠加得到,即

$$\psi = U_\infty\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)r\sin\theta+\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{6.4.21}$$

(6.4.20)和(6.4.21)式中,$r \geqslant r_0$。

由流场的速度势函数(6.4.20)式,可以求得流场的速度分布为

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = U_\infty\left(1-\dfrac{r_0^2}{r^2}\right)\cos\theta \\ u_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -U_\infty\left(1+\dfrac{r_0^2}{r^2}\right)\sin\theta-\dfrac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \tag{6.4.22}$$

上式表明,柱体上方的速度由直线平移流动速度和环流速度叠加得到,柱体下方的速度由直线平移流动速度和环流速度相减得到,因此,柱体上方的速度比下方的速度要大。

在柱体表面上,将 $r=r_0$ 代入(6.4.22)式,得到

$$\begin{cases} u_r = 0 \\ u_\theta = -2U_\infty\sin\theta-\dfrac{\Gamma}{2\pi r_0} \end{cases} \tag{6.4.23}$$

柱体上速度为零的临界点位于柱体下方。令 $u_\theta=0$,可得

$$\sin\theta_{cr} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\cdot\frac{1}{U_\infty r_0} \tag{6.4.24}$$

上式给出临界点位置的三种情况:

1)当 $\Gamma<4\pi r_0U_\infty$ 时,分别位于 $180°<\theta_{cr1}<270°$ 和 $270°<\theta_{cr2}<360°$,有两个对称分布的临界点,如图 6.12(b)所示;

2)当 $\Gamma=4\pi r_0U_\infty$ 时,$\theta_{cr1}=270°$ 和 $\theta_{cr2}=270°$,两个临界点合二为一,位于柱体表面 y 轴的正下方,如图 6.12(c)所示;

3)当 $\Gamma>4\pi r_0U_\infty$ 时,在柱体表面以外有一个临界点,这种情况下,在柱体表面周围形成了一个非圆形流线的环流运动区域,如图 6.12(d)所示。

(2)压力分布

由理想流体绕圆柱流动的压力分布(6.4.13)式和速度分布(6.4.22)式,得

$$\frac{p-p_0}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 1-\left(\frac{u}{U_\infty}\right)^2 = -2\frac{r_0^2}{r^2}(\sin^2\theta-\cos^2\theta)-\frac{r_0^4}{r^4}-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{r^2U_\infty^2}-\frac{\Gamma}{\pi rU_\infty}\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)\sin\theta \tag{6.4.25}$$

在柱面上,将 $r=r_0$ 代入(6.4.25)式,得到

$$\frac{p-p_0}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 1-4\sin^2\theta-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{r_0^2U_\infty^2}-\frac{2\Gamma}{\pi r_0U_\infty}\sin\theta \tag{6.4.26}$$

或

$$p = p_0+\frac{1}{2}\rho U_\infty^2-\frac{\rho}{2}\left(4U_\infty^2\sin^2\theta+\frac{2\Gamma U_\infty}{\pi r_0}\sin\theta+\frac{\Gamma^2}{4\pi^2r_0^2}\right) \tag{6.4.27}$$

由上式可知,压力分布对称于 y 轴,而不对称于 x 轴。由于 $\sin\theta$ 在 $180°<\theta<360°$ 范围内均为

负值，所以圆柱体表面下半部分各点的压力处处大于上半部分各点的压力，最大压力在临界点处，最小压力在圆柱体截面的顶点。因此，对于绕圆柱体的有环量的无旋运动，圆柱体表面上的压力分布不仅与 U_∞ 和 θ 有关，而且与速度环量 Γ 有关。

(3)马格努斯效应

作用在圆柱体上的力，如图6.13所示。作用在圆柱体上的压力合力在 x 轴和 y 轴上的投影分别为 F_x 和 F_y。作用于长度为 b，宽度为 $r_0\mathrm{d}\theta$ 的微元面积上的压力投影为

$$\begin{cases}\mathrm{d}F_x = -pr_0b\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}F_y = -pr_0b\sin\theta\mathrm{d}\theta\end{cases}$$

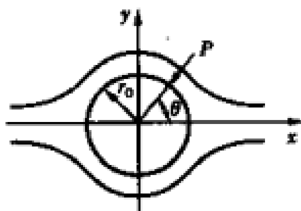


图6.13 柱体上的作用力

将(6.4.27)式代入上式，得到

$$\begin{cases}\mathrm{d}F_x = -\left(r_0bp_0 + \dfrac{1}{2}r_0\rho bU_\infty^2 - 2r_0\rho bU_\infty^2\sin^2\theta - \right. \\ \qquad \left. \dfrac{\rho b\Gamma U_\infty}{\pi}\sin\theta - \dfrac{\rho b\Gamma^2}{8\pi^2r_0}\right)\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}F_y = -\left(r_0bp_0 + \dfrac{1}{2}r_0\rho bU_\infty^2 - 2r_0\rho bU_\infty^2\sin^2\theta - \right. \\ \qquad \left. \dfrac{\rho b\Gamma U_\infty}{\pi}\sin\theta - \dfrac{\rho b\Gamma^2}{8\pi^2r_0}\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta\end{cases}$$

积分上式得

$$\begin{cases}F_x = 0 \\ F_y = \rho b\Gamma U_\infty\end{cases} \tag{6.4.28}$$

上式表明，理想流体作有环量的平移流动时，对产生环量的绕轴线自旋的长圆柱体作用的力，是与圆柱体自旋轴线垂直的横向力，通常称为升力。升力的方向可由来流速度矢量方向逆环流方向转过90°得到。因为是理想流体绕圆柱体流动，所以圆柱体在水平方向受到的阻力为零。

6.5 有旋运动

在流体流动的部分区域内，如果流体的速度旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{u} \neq 0$，则流体的运动称为有旋运动。自然界和工程实际中，绝大多数流体运动都是不能忽略流体涡旋影响的有旋运动。因此，认识涡旋运动的性质，了解流体涡旋的发生及其变化规律，对研究流体的有旋运动有重要的理论和实际意义。

6.5.1 涡旋场

(1)涡旋场

设流体流动的区域有旋，则任一固定时刻在流动区域内，空间各点都有一个由速度矢量 $\boldsymbol{u}$ 的旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{u}$ 所确定的矢量函数，从而组成一个叫做涡旋场的矢量场，记为 $\boldsymbol{\Omega}$，即

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{rot}\boldsymbol{u} \tag{6.5.1}$$

其中,矢量 Ω 称为涡量,它是空间位置矢径 $\boldsymbol{r}(x,y,z)$ 和时间 t 的函数:

$$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{\Omega}(x,y,z,t) \tag{6.5.2}$$

涡量 Ω 在直角坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{i}\Omega_x+\boldsymbol{j}\Omega_y+\boldsymbol{k}\Omega_z \tag{6.5.3}$$

式中 $\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z$ 是涡量 Ω 的三个直角坐标分量。如果速度矢量 $\boldsymbol{u}$ 在直角坐标系中表示为

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}u_x+\boldsymbol{j}u_y+\boldsymbol{k}u_z \tag{6.5.4}$$

由流体微团变形速度张量可知,涡量 Ω 是角速度 ω 的两倍,则涡量 Ω 的三个直角坐标分量分别是

$$\begin{cases}\Omega_x=\dfrac{\partial u_z}{\partial y}-\dfrac{\partial u_y}{\partial z}=2\omega_x\\[2ex]\Omega_y=\dfrac{\partial u_x}{\partial z}-\dfrac{\partial u_z}{\partial x}=2\omega_y\\[2ex]\Omega_z=\dfrac{\partial u_y}{\partial x}-\dfrac{\partial u_x}{\partial y}=2\omega_z\end{cases} \tag{6.5.5}$$

式中 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 是角速度 ω 的三个直角坐标分量。

(2)涡线、涡面和涡管

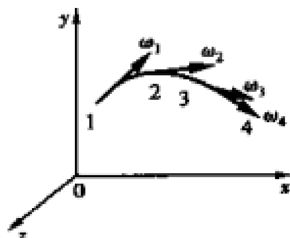


图 6.14　涡线

同一时刻,在涡旋场中如果有一条由不同流体质点组成的曲线,曲线上每一点的切线方向和该点的涡量方向重合,则定义这条流体质点线为涡线。显然,组成涡线的流体质点都绕涡线的切线方向旋转,如图 6.14 所示。若涡线上与点的切线方向一致的弧元素矢量为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,根据定义可以给出下面矢量形式的涡线方程

$$\boldsymbol{\Omega}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0 \tag{6.5.6}$$

将涡线微分方程(6.5.6)写成直角坐标系形式为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\Omega_x(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}y}{\Omega_y(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}z}{\Omega_z(x,y,z,t)} \tag{6.5.7}$$

在涡旋场中,过一条非涡线的曲线上每一点作涡线,这些涡线组成的曲面称为涡面。取一条不自交、非涡线的封闭曲线,过曲线上每一点作涡线,这些涡线组成一个管状曲面,称为涡管。如果封闭曲线无限小,组成的涡管为涡管元。所谓孤立涡管,是指这根涡管周围流体的涡旋都为零。

6.5.2　斯托克斯定理

涡通量和速度环量都是表征涡旋强度的物理量,它们之间的紧密联系由斯托克斯公式揭示出来。

(1)涡通量

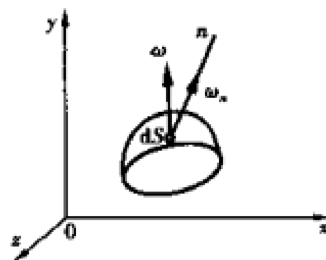


图 6.15　涡旋场

给定一涡旋场 $\Omega(\boldsymbol{r},t)$。在场内任取一曲面 S,见图 6.15,它可以是封闭的也可以是不封闭的。在 S 面上取一面积元素 $\mathrm{d}S$,在 $\mathrm{d}S$ 上任取一点 M,作 S 面在 M 点的法线,令 n 是法线方向的单位矢量。设 Ω 代表 M 点的涡量函数,则涡

量 Ω 在法线方向的投影为

$$\Omega_n = \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{n} = \Omega_x \cos(n,x) + \Omega_y \cos(n,y) + \Omega_z \cos(n,z) \tag{6.5.8}$$

定义涡量 Ω 通过任一曲面 S 的面积元 $\mathrm{d}S$ 的通量为 $\Omega_n \mathrm{d}S$。将通量为 $\Omega_n \mathrm{d}S$ 沿曲面 S 积分，得到涡量 Ω 通过 S 面的涡通量，记为 J，即

$$J = \int_S \Omega_n \mathrm{d}S = \int_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{6.5.9}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 是面积矢量。将 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 视为面积矢量时，矢量的大小为 $\mathrm{d}S$，矢量的方向用其上单位法线矢量 $\boldsymbol{n}$ 的正方向表示。

涡通量 J 也叫做涡管强度，它是表示涡旋强弱的物理量。如果涡管截面为 A，通过该截面的平均涡量为 Ω，由(6.5.9)式可以求得涡管强度为

$$J = \Omega A \tag{6.5.10}$$

类似地，在速度场中，流管的截面 A 与通过该截面的平均速度 U 的乘积 $Q = UA$，称为体积流量，也叫流管强度，它是表示流量大小的物理量。

(2) 速度环量

给定一个速度矢量场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$。在场内取任意一条封闭曲线 L，作线积分，得到速度矢量 $\boldsymbol{u}$ 沿曲线 L 的速度环量，记为 Γ，即

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_L (u_x \mathrm{d}x + u_y \mathrm{d}y + u_z \mathrm{d}z) \tag{6.5.11}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是封闭曲线 L 上的弧元素矢量，并规定逆时针方向为 L 的正方向。由(6.5.11)式可知，速度环量 Γ 表征流体质点沿封闭曲线 L 运动趋势的大小。

(3) 斯托克斯定理

场论中，不依赖于坐标系选择的斯托克斯公式为

$$\oint_L \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{6.5.12}$$

斯托克斯公式揭示出速度环量等于涡管强度（涡通量）这一事实，即

$$\Gamma = J \tag{6.5.13}$$

其中 S 面张于封闭曲线 L 上，法线单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的正方向与 L 的正方向组成右手螺旋系统，如图 6.15 所示。(6.5.13)式称为斯托克斯定理。

在理论和实验中，依据斯托克斯公式(6.5.12)，利用速度环量来考察流场涡旋强弱程度，往往比采用涡通量来考察要便利得多。因为，速度环量是线积分且被积函数是速度本身，而涡通量是面积分，被积函数却是速度的偏导数。由于速度是欧拉方法描述流场的基本矢量，有些情况下，只能利用速度环量来描写涡旋的强度。

6.5.3　涡旋运动的性质

涡旋场是无源场，因为涡旋场的散度为零，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\Omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{u}) = 0 \tag{6.5.14}$$

依据场论中无源场的性质，可以对涡旋运动的性质作如下描述：

1) 涡旋矢量 Ω 通过涡管任一截面上的涡通量保持同一数值；

2) 涡管不能在涡旋场内发生或终止，只可能伸延至无穷远靠在区域边界上或自成封闭涡管；

3)涡旋矢量 Ω 通过张于一已知周线 L 的所有曲面 S 上的涡通量都相同,也就是说涡通量只依赖于周线 L 而与所张的曲面 S 的形状无关。

给定一涡管,任取该涡管的两个截面 A_1 和 A_2。截面 A_1 和 A_2 之间的涡管侧面 A_3(涡面)与两个截面组成一个封闭曲面 S,封闭曲面 S 内的体积为 V。对封闭曲面 S 和体积 V 写出的奥高公式为

$$\oint_S \Omega_n \mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{\Omega}\mathrm{d}V$$

因为涡旋场无源,将(6.5.14)式代入上式,得到

$$\int_S \Omega_n \mathrm{d}S = 0$$

式中积分曲面 $S = A_1 + A_2 + A_3$,上式可以改写为

$$-\int_{A_1} \Omega_n \mathrm{d}S + \int_{A_2} \Omega_n \mathrm{d}S + \int_{A_3} \Omega_n \mathrm{d}S = 0$$

其中对截面 A_1 取内法线方向,对截面 A_2 和涡管侧面 A_3 取外法线方向。在涡管侧面 A_3(涡面)上没有涡旋矢量 Ω 通过,即 $\boldsymbol{\Omega}_n = 0$,于是

$$\int_{A_3} \Omega_n \mathrm{d}S = 0$$

最后得到

$$\int_{A_1} \Omega_n \mathrm{d}S = \int_{A_2} \Omega_n \mathrm{d}S$$

上式表明涡旋运动的性质 1):涡旋矢量 Ω 通过涡管任一截面上的涡通量保持同一数值。

性质 2)是性质 1)的推论。因为如果涡管在涡旋场内发生或终止,则性质 1)不能成立。

设两个张于周线 L 的任意曲面 S_1 和 S_2 组成的封闭曲面 S,以及封闭曲面 S 包围的体积 V。对封闭曲面 S 和体积 V 应用奥高公式,有

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{\Omega}\mathrm{d}V = \int_{S_1} \Omega_n \mathrm{d}S - \int_{S_2} \Omega_n \mathrm{d}S = 0$$

式中对曲面 S_1 取外法线方向,对曲面 S_2 取内法线方向。由上式推出

$$\int_{S_1} \Omega_n \mathrm{d}S = \int_{S_2} \Omega_n \mathrm{d}S$$

上式表明涡旋运动的性质 3):涡旋矢量 Ω 通过张于一已知周线 L 的所有曲面 S 上的涡通量都相同。

6.5.4 亥姆霍兹方程

(1)牛顿流体涡旋微分方程

粘性系数等于常数(μ = 常数)的流体称为牛顿流体。牛顿流体的兰姆-葛罗米柯形式的运动方程为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla \frac{u^2}{2} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{u} + \frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \tag{6.5.15}$$

方程左端是单位质量上的动量变化,即速度的随体导数 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t$,等于当地加速度 $\partial\boldsymbol{u}/\partial t$ 和变位加速度 $(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}$ 之和。变位加速度已利用下面的场论公式

$$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = \mathrm{grad}\frac{u^2}{2} - \boldsymbol{u} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{u}$$

改写为式中的形式。方程右端是引起单位质量上的动量变化的三种力的因素，即外力 $\boldsymbol{F}$；压力梯度；粘性应力，其中 ν 是运动粘度。

对(6.5.15)式两边取旋度，得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}+\nabla\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{u})=\\&\nabla\times\boldsymbol{F}-\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)+\nabla\times(\nu\Delta\boldsymbol{u})+\frac{1}{3}\nabla\times(\nu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}))\end{aligned}\tag{6.5.16}$$

利用场论公式

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\Omega}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\operatorname{div}\boldsymbol{\Omega}$$

考虑到 $\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega}=0$，(6.5.16)式左边可改写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}+\nabla\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{u})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\Omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})$$

将上式代入(6.5.16)式，得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\Omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})=\\&\nabla\times\boldsymbol{F}-\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)+\nabla\times(\nu\Delta\boldsymbol{u})+\frac{1}{3}\nabla\times(\nu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}))\end{aligned}\tag{6.5.17}$$

上式是牛顿流体的涡旋微分方程，即粘性为常数时涡旋矢量应该满足的微分方程。

(2) 亥姆霍兹方程

流体满足理想、正压且外力有势的条件为

$$\mu=0,\quad \boldsymbol{F}=-\nabla\tilde{V},\quad \frac{1}{\rho}\nabla p=\nabla\Pi\tag{6.5.18}$$

式中，$\tilde{V}$ 是力势函数；$\Pi=\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}$ 是压力势函数。将(6.5.18)式代入(6.5.17)式，涡旋微分方程变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\Omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})=0\tag{6.5.19}$$

上式称为亥姆霍兹方程。

不可压缩粘性流体在有势外力作用下，涡旋矢量满足的微分方程是

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\nu\Delta\boldsymbol{\Omega}\tag{6.5.20}$$

理想不可压缩流体在有势外力作用下，涡旋矢量满足的微分方程是

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=0\tag{6.5.21}$$

6.5.5　理想、正压、外力有势流体的涡旋运动性质

(1) 凯尔文定理

理想、正压且外力有势流体，沿任一封闭流体质点线和通过任一流体质点组成的曲面的涡通量在运动过程中恒不变。

凯尔文定理证明，在理想、正压、外力有势流体的运动过程中，沿任一封闭流体质点线的速度环量和通过流体质点组成的任一曲面的涡通量守恒。利用凯尔文定理推导出的拉格朗日定

理，证明了理想、正压、外力有势流体中涡旋的某些动力学性质。涡旋在理想、正压、外力有势流体运动过程中的随体变化规律，由亥姆霍兹第一定理和亥姆霍兹第二定理给出。

某一固定时刻，沿一条由流体质点组成的封闭流体线 L 的速度环量 Γ 的随体导数为

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_L \boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{r}=\oint_L \boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}-\oint_L\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\delta\boldsymbol{r}+\oint_L\nu\left(\Delta\boldsymbol{u}+\frac{1}{3}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\right)\cdot\delta\boldsymbol{r} \tag{6.5.22}$$

通过张于流体线 L 上的任一曲面 S 的涡通量 J 的随体导数为

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S\boldsymbol{\Omega}\cdot\delta\boldsymbol{S}=\int_S\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\Omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\right)\cdot\delta\boldsymbol{S}=$$
$$\int_S\nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{S}-\int_S\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)\cdot\delta\boldsymbol{S}+\int_S\nabla\times\left(\nu\Delta\boldsymbol{u}+\frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\right)\delta\boldsymbol{S} \tag{6.5.23}$$

根据斯托克斯定理，有

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}=\frac{\partial J}{\partial t} \tag{6.5.24}$$

(6.5.22)、(6.5.23)和(6.5.24)式表明，外力、压力梯度和粘性力沿封闭流体线 L 的速度环量是引起速度环量 Γ 和涡通量 J 的随体导数变化的因素。

如果流体理想、正压且外力有势，则速度环量 Γ 的随体导数(6.5.22)式和涡通量 J 的随体导数(6.5.23)式为零。因为，如果是理想流体，则粘性力等于零，那么粘性力沿封闭流体线 L 的速度环量为零，导致涡通量发生变化的粘性力也不起作用，有

$$\oint_L\nu\left(\Delta\boldsymbol{u}+\frac{1}{3}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\right)\cdot\delta\boldsymbol{r}=\int_S\nabla\times\left(\nu\Delta\boldsymbol{u}+\frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\right)\delta\boldsymbol{S}=0$$

如果外力有势，即 $\boldsymbol{F}=-\nabla\tilde{V}$，则外力沿封闭流体线 L 的速度环量为零，也不会引起涡通量发生变化，有

$$\int_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\delta\boldsymbol{S}=\oint_L\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}=\oint_L-\nabla\ \tilde{V}=-\oint_L\delta\ \tilde{V}=0$$

如果流体正压，即 $\frac{1}{\rho}\nabla p=\nabla\Pi$，则压力梯度沿封闭流体线 L 的速度环量为零，不会引起涡通量发生变化，有

$$\int_S\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)\cdot\delta\boldsymbol{S}=\oint_L\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\delta\boldsymbol{r}=\oint_L\nabla\Pi\cdot\delta\boldsymbol{r}=\oint_L\delta\Pi=0$$

于是，

$$\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial J}{\partial t}=0 \tag{6.5.25}$$

积分得

$$\Gamma=常数,\quad J=常数$$

上面的结论正是凯尔文定理表述的内容。

利用凯尔文定理可以证明由拉格朗日定理表述的内容，即理想、正压流体在有势外力作用下，无旋则永远无旋，有旋则永远有旋。

(2)拉格朗日定理(涡旋不生不灭定理)

如果流体理想、正压，且外力有势，初始时刻在某部分流体内有旋，则以前或以后任一时刻

这部分流体内都有旋；反之，初始时刻在某部分流体内无旋，则以前或以后任一时刻这部分流体内都无旋。

在流体理想、正压，且外力有势的假定下，亥姆霍兹第一定理和亥姆霍兹第二定理给出了涡旋的随体变化规律。

(3) 亥姆霍兹第一定理（涡线保持定理）

如果流体是理想、正压的，且外力有势，则在某时刻组成涡线的流体质点在前一时刻和后一时刻也永远组成涡线。

类似涡线保持定理的表述，涡面保持定理可以表述为：如果流体是理想、正压的，且外力有势，则在某时刻组成涡面的流体质点在前一时刻和后一时刻也永远组成涡面。涡管保持定理可以表述为：如果流体是理想、正压的，且外力有势，则在某时刻组成涡管的流体质点在前一时刻和后一时刻也永远组成涡管。

利用凯尔文定理可以导出，流体是理想、正压的，且外力有势条件下涡管强度守恒。这是亥姆霍兹第二定理表述的内容。

(4) 亥姆霍兹第二定理（涡管强度保持定理）

如果流体是理想、正压的，且外力有势，则涡管的强度在运动过程中恒不变。

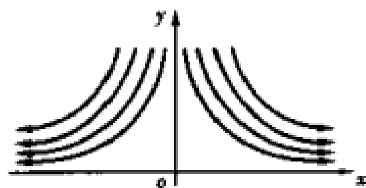
以上定理全面地描述了理想、正压、外力有势流体的涡旋运动性质，并揭示出粘性、不正压、外力无势是产生涡旋的三个要素。

习　　题

6.1　液体射流冲击平面，可以近似看做二维驻点流，如图所示。若 $x=y=0$ 是驻点，驻点压力为 p_0，在驻点处流体向相反两个方向分成两股。已知该流场的流函数为：

$$\psi = -axy$$

a 为常数。试求速度分量 u_x, u_y 以及压力分布，并画出流线。（答案：$p=p_0-\rho a^2(x^2+y^2)/2$）



题 6.1 附图

6.2　理想不可压缩流体作无旋运动，已知速度势为

$$\varphi = -\frac{2t}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

如果在运动过程中，点(1,1,1)上的压力总是 $p_1=1.2\mathrm{kg/cm^2}$。令 $\rho g=1$，求运动开始 20s 后，点(4,4,2)的压力。（答案：$p=0.286\mathrm{kg/cm^2}$）

6.3　剪切流动的速度场为

$$u_x = ay,\quad u_y = u_z = 0$$

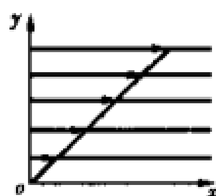
其中 a 是常数，流线是平行 x 轴的直线，试问流场是有旋还是无旋？（答案：流场处处有旋）

6.4　点涡运动的速度场为

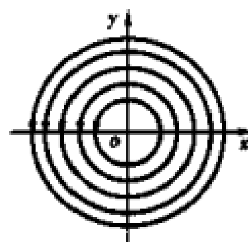
$$u_r = 0,\quad u_\theta = \frac{b}{r}$$

其中 b 是常数，流线是以原点为中心的同心圆，试问流场是有旋还是无旋？（答案：当 $r\neq 0$ 时，

流场处处无旋）



题 6.3 附图



题 6.4 附图

6.5 下列流动中 c 为常数，试判别这些流动是否有旋，并作出流线形状：

(1) $u_x = cy, u_y = u_z = 0$；　　(2) $u_x = c, u_y = u_z = 0$；

(3) $u_x = -cy, u_y = cx, u_z = 0$；　　(4) $u_x = \frac{cy}{x^2+y^2}, u_z = \frac{cx}{x^2+y^2}, u_z = 0$。

6.6 试判别下列流动分别是几维流动？其中哪些是有旋流动？哪些是定常流动？

(1) $u_x = cx, u_y = -cy, u_z = cxy$；　　(2) $u_x = yzt, u_y = zxt, u_z = 0$；

(3) $u_x = -\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2},\ u_y = -\frac{(x^2-y^2)z}{(x^2+y^2)^2},\ u_z = \frac{y}{x^2+y^2}$。

6.7 确定下列流场中的速度是否满足不可压缩流体的连续性条件：

(1) $u_x = kx, u_y = -ky$；　　(2) $u_x = k(x^2+xy+y^2), u_y = k(x^2+y^2)$；

(3) $u_x = k\sin(xy), u_y = -k\sin(xy)$；　　(4) $u_x = k\ln(xy), u_y = -ky/x$。

6.8 试证明极坐标表示的不可压缩流体平面运动的连续性方程和旋转角速度分别为

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0, \qquad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)$$

6.9 已知有旋流动的速度场为

$$u_x = x + y, u_y = y + z, u_z = x^2 + y^2 + z^2$$

求在点(2,2,2)处角速度的分量。（答案：$\omega_x = \frac{3}{2}, \omega_y = -2, \omega_z = -\frac{1}{2}$）

6.10 已知有旋流动的速度场为

$$u_x = 2y + 3z, u_y = 2z + 3x, u_z = 2x + 3y$$

试求旋转角速度分量和角变形速度分量（剪切变形速率）。

（答案：$\omega_x = \omega_y = \omega_z = \frac{1}{2}; \dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zx} = \frac{5}{2}$）

6.11 试证明不可压缩流体

$$u_x = 2xy + x, u_y = x^2 - y^2 - y$$

是一个有势流动，试求其速度势。（答案：$\varphi = \frac{x^2}{2} + 2x^2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}$）

6.12 不可压缩流体平面流动的速度势为 $\varphi = x^2 - y^2 + x$，试求其流函数。

（答案：$\psi = 4xy + y$）

6.13 下列流函数是否是有势流动？

(1) $\psi = kxy$；　　(2) $\psi = x^2 - y^2$；

(3) $\psi = k\ln xy^2$；　　　　　(4) $\psi = k\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)r\sin\theta$。

6.14　已知速度势 $\varphi = xy$，求速度分量和流函数，并证明等势线和流函数是正交的。

（答案：$u_x = y, u_y = x, \psi = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$）

6.15　在位于(1,0)和(−1,0)两点具有相同强度 4π 的点源，试求在点(0,0)，点(0,1)，点(0,−1)和点(1,1)处对应的速度 u_1, u_2, u_3, u_4。

（答案：$u_{1x} = 0, u_{1y} = 0; u_{2x} = 0, u_{2y} = 2; u_{3x} = 0, u_{3y} = -2; u_{4x} = \frac{4}{5}, u_{4y} = 2\frac{2}{5}$）

第7章 粘性流体的流动

真实流体都是有粘性的。粘性流体运动中不可避免地存在阻力、衰减和扩散现象，粘性流体运动时总是伴随着内摩擦和传热过程，发生能量耗损。流体在运动过程中会受到阻力，阻力问题是流体力学中最重要的问题之一。当粘性力比惯性力小得多的情况下，可以将真实流体按没有粘性的理想流体来处理。理想流体是真实流体的近似模型，在解决阻力、能量耗散以及扩散问题时就完全失效了，要解决这些问题必须考虑流体的粘性。粘性流体运动有层流和湍流两种性质不同的运动形态。

7.1 粘性流体运动的性质和基本方程

粘性流体运动有层流和湍流两种性质决然不同的运动形态。层流的特征是流体运动规则，流场中各部分流体分层流动互不掺混，流场稳定，质点轨线光滑。湍流的特征则完全相反，流体运动极不规则，流场中各部分流体激烈掺合，流场极不稳定，质点轨线杂乱无章。但是，层流和湍流在一定条件下是可以互相转化的。

7.1.1 层流和湍流的互相转化

(1)雷诺实验

1883年雷诺为了观察层流和湍流的互相转化，对圆管内的粘性流体流动进行了实验。雷诺实验装置如图7.1所示。为了识别管内粘性流体的流动情况，用一根滴管将有色液体注入到圆管内稳定流动的无色液体中。当管内无色液体的速度不大时，滴入管内的有色液体呈现为清晰可见的有色细丝。有色细丝与管内分层流动的无色液体互不掺混，流体质点的轨线是与管壁平行的直线。这种情况下，管内无色液体的运动处于层流状态。如果逐渐增加管内液体的速度，有色细丝开始变粗，摆动如波浪形状。管内液体速度继续增加，有色波浪状细丝的振幅和频率随之增加，当管内液体速度达

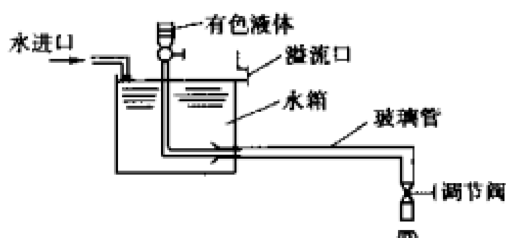


图7.1 雷诺试验装置

到某一数值时，有色细丝突然破裂，形成许多旋涡向外扩散，在很短时间内便消失，使管内整个液体染成淡薄的颜色。这种情况下，管内各部分液体剧烈掺混，流体质点的轨线紊乱，管内液体的运动处于湍流状态。

(2)临界雷诺数

雷诺对于不同粘性系数 μ 的流体和不同直径 d 的圆管进行了大量实验，发现管内流体流动呈现层流状态还是湍流状态，主要取决于管内流体平均速度 u、圆管直径 d 和运动粘性系数 ν 组成的无量纲数，称这一量纲一数为雷诺数，记为

$$\mathrm{Re} = \frac{ud}{\nu} \tag{7.1.1}$$

需要指出的是，雷诺数($\mathrm{Re} = \rho UL/\mu$)通常是惯性力的典型大小与粘性力的典型大小的一种量度。如果雷诺数与1相比的数值很大，而且没有发生流体边界层与刚性壁面分离的情况，那么在整个流场中，运动方程的粘性力作用都可以忽略。发生流体边界层与刚性壁面分离时，无论雷诺数多大，粘性力都会存在于流体与刚性壁面接触的一定薄层内，并发挥重要作用。在流场大部分区域可以忽略粘性力作用的情况下，无论粘性力多小，都必须保证在刚性边界上满足无滑移条件。对于大雷诺数流体，例如水和空气，利用理想流体的理论有很好的近似。

7.1.2　粘性流体运动的性质

粘性流体运动过程中总是存在涡旋，并且伴随涡旋不断扩散而发生能量耗散。运动有旋性、涡旋扩散性和机械能耗散性是粘性流体运动的基本性质。

(1)运动有旋性

粘性流体运动具有有旋性。粘性流体运动方程与理想流体运动方程相比，多了粘性力这一项。如果是无旋流动，粘性流体运动方程中的粘性力项便自动消失。粘性流体运动一般是有旋的，因为粘性流体沿物体表面运动无滑动，离开表面的流体有相对运动，在物体表面层的流体内存在速度梯度，使流场的涡量不为零。由于粘性的作用，边界上产生的涡旋将向远处扩散。

(2)涡旋扩散性

粘性流体运动具有涡旋扩散性。我们用平板在粘性流体中运动来说明粘性流体中涡旋扩散的性质。有一无穷长平板以速度 U 突然起动，开始在粘性不可压缩流体中作等速运动。沿平板表面的流体由于粘性紧贴表面，也以速度 U 跟随平板运动，平板之外的流体仍然保持静止状态。于是，在平板表面上的流体中出现了切向速度间断面，形成一个很薄的涡层，平板成为涡旋的发源地。

随着时间增长，平板表面以外的流体由近及远逐步被带动起来。于是，涡量由平板表面附近涡量强的地方向远离表面涡量弱的地方传送，涡旋向外扩散。扩散过程中，平板表面附近的涡量强度减弱，流场中的涡量趋于相等。如果时间足够长，整个流场中的流体都将被带动起来，以至于所有流体均以速度 U 运动，最后涡旋消失，流场中的涡量为零。实际上，在被带动起来的流体中，垂直于流动方向的速度衰减很快，因此流体运动过程中的动量传递和涡旋扩散，主要限于平板表面附近的流体薄层。伴随涡旋扩散，粘性力还将引起能量耗散。

(3)能量耗散性

粘性流体运动具有机械能耗散性。由于粘性力的存在，流体运动过程中存在粘性耗散发

热现象,彻体力和表面力所做的功并不是全部都变成了动能。事实上,彻体力和表面力所做的功有一部分变成了热能耗散掉,使流体与其所接触的固体壁面温度升高。流体运动时变形率越大,切应力也越大,粘性导致能量耗散越多。

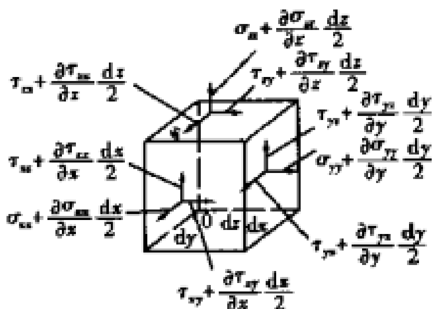


图 7.2　粘性流体中的立方微元

7.1.3　粘性流体运动方程

(1)流体微元上的应力

粘性流体运动和理想流体运动的流体加速度的表达式是一样的,但是在引起粘性流体运动的表面力与作用面不垂直情况下,沿三个坐标轴方向分解可以分别得到三个应力分量,如图 7.2 所示。作用于垂直 x 轴的表面上的三个应力分量是 $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$;作用于垂直 y 轴的表面上的三个应力分量是 $\tau_{yx}, \sigma_{yy}, \tau_{yz}$;作用于垂直 z 轴的表面上的三个应力分量是 $\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_{zz}$。可以证明,六个切应力分量中只有三个是独立的,即

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{7.1.2}$$

根据牛顿第二定律,微元体的质量和加速度的乘积等于作用在微元体上的外力之和,能够很方便地得到以应力表示的运动方程。应力形式的基本方程组已在"流体力学基本方程组"一章作了介绍。

当温差足够小时,近似认为粘度不随温度发生变化,而在整个流体中取同一常数值。对于粘性不可压缩均值流体,其基本方程组为

$$\begin{cases} \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} - \dfrac{1}{\rho}\mathrm{grad}p + \nu\Delta\boldsymbol{u} \\ \rho C\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k\Delta T + \Phi \end{cases} \tag{7.1.3}$$

其中 ν 是运动粘性常数,C 是不可压缩均值流体的比热($C = C_p = C_V$),k 是热传导系数,$\Phi = 2\mu S^2$ 是耗损系数。由上面五个方程可以确定速度 $\boldsymbol{u}$,压力 p 和温度 T 五个未知数。一般情况下,动力学元素 p,运动学元素 $\boldsymbol{u}$ 和热力学元素 T 是相互影响的。流体内部因粘性耗损产生热量或从流动边界传入热量时,流场都要受到温度场的影响。流体的粘性主要是温度的函数,随温度不同而发生变化。

如果温度变化不大,流场将不受温度场影响,可以独立于温度场求解。这情况下粘性系数 ν 近似是常数,流体运动问题和传热问题可以分开讨论,即先从连续方程和运动方程解出速度 $\boldsymbol{u}$ 和压力 p,然后代入能量方程求温度 T。对于流体流动问题,连续方程和运动方程为

$$\begin{cases} \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} - \dfrac{1}{\rho}\mathrm{grad}p + \nu\Delta\boldsymbol{u} \end{cases} \tag{7.1.4}$$

由上面四个方程可以确定速度 $\boldsymbol{u}$ 和压力 p 四个未知数。粘性流体的连续性方程形式和理想流体的相同。

(2)纳维-斯托克斯方程

方程组(7.1.4)式中粘性流体的运动方程称为纳维-斯托克斯方程,简称N-S方程。N-S方程在直角坐标系中的形式为

$$\begin{cases}\rho\dfrac{\partial u_x}{\partial t}+\rho\left(u_x\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\dfrac{\partial u_x}{\partial z}\right)=\rho F_x-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)\\ \rho\dfrac{\partial u_y}{\partial t}+\rho\left(u_x\dfrac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right)=\rho F_y-\dfrac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)\\ \rho\dfrac{\partial u_z}{\partial t}+\rho\left(u_x\dfrac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right)=\rho F_z-\dfrac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)\end{cases}\tag{7.1.5}$$

N-S方程的左端是流体微元体的质量和加速度的乘积;右端是作用在微元体上的外力,它们分别是彻体(质量)力、压力和粘性力。N-S方程是描述粘性流体运动的具体形式,可以看做是惯性力、彻体(质量)力、压力和粘性力四种力的平衡关系式。

纳维-斯托克斯方程在柱坐标系中的形式为

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta^2}{r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)=$$
$$-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right]+\rho F_r \tag{7.1.6a}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}-\frac{u_r u_\theta}{r}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)=$$
$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\right]+\rho F_\theta \tag{7.1.6b}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=$$
$$-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]+\rho F_z \tag{7.1.6c}$$

纳维-斯托克斯方程在球坐标系中的形式为

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{u_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}-\frac{u_\theta^2+u_\varphi^2}{r}\right)=$$
$$-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\varphi^2}-\right. \tag{7.1.7a}$$
$$\left.\frac{2}{r^2}u_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2}u_\theta\cot\theta-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right]+\rho F_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}+\frac{u_r u_\theta}{r}-\frac{u_\varphi^2\cot\theta}{r}\right)=$$
$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right)+\right. \tag{7.1.7b}$$
$$\left.\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\varphi^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right]+\rho F_\theta$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}+\frac{u_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\varphi u_r}{r}+\frac{u_\varphi u_\theta}{r}\cot\theta\right)=$$

$$-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi}+\mu\left[\frac{1}{r}-\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial_\varphi}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right]+\rho F_\varphi \tag{7.1.7c}$$

(3)平面涡量传输方程

当流体作二维运动时,粘性流体运动的连续性方程和 N-S 方程为

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0 \tag{7.1.8}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_x}{\partial y}=F_x-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)\\ \dfrac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_y}{\partial y}=F_y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right)\end{cases} \tag{7.1.9}$$

引进涡量

$$\omega=\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tag{7.1.10}$$

分别将 N-S 方程(7.1.9)中 x 方向的投影方程(第一式)对 y 求导,y 方向的投影方程(第二式)对 x 求导,然后用后者减去前者,如果彻体力有势,便得到下面形式的平面涡量传输方程

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+u_x\frac{\partial\omega}{\partial x}+u_y\frac{\partial\omega}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right) \tag{7.1.11}$$

上式表明,涡量的变化等于粘性摩擦引起的涡量耗散速率。(7.1.11)式直接反映了粘性流体运动的有旋性。

7.1.4 初始条件和边界条件

(1)初始条件

初始条件决定所求函数在给定时刻的值。对于不可压缩流体的运动,要求给定 $t=t_0$ 时速度分量和压力关于时间 t_0 的函数,即

$$\begin{cases}u_x(x,y,z,t_0)=f_1(x,y,z)\\ u_y(x,y,z,t_0)=f_2(x,y,z)\\ u_z(x,y,z,t_0)=f_3(x,y,z)\\ p(x,y,z,t_0)=f_4(x,y,z)\end{cases} \tag{7.1.12}$$

(2)边界条件

边界条件决定所求流体函数在流动边界上的值。不同问题的边界条件是各不相同的。

在静止固体表面上,粘性流体沿固体表面无滑移,流体速度必须为零,即

$$u=0 \tag{7.1.13}$$

在非固定的相界面上,粘性流体速度不一定为零。所谓相界面是指两种互不相溶的液体界面,或气体和液体的界面。这类边界条件的要求是:

1)两相流体接触界面的切向速度 u_t 连续,即流体 1 和流体 2 接触界面的切向速度应满足

$$(u_t)_1=(u_t)_2 \tag{7.1.14}$$

2)两相流体接触界面的法向速度 u_n 为零,即

$$(u_n)_1 = (u_n)_2 = 0 \tag{7.1.15}$$

3）两相流体接触界面的应力分量连续，即

$$(\sigma_n)_1 = (\sigma_n)_2, \quad (\tau_t)_1 = (\tau_t)_2 \tag{7.1.16}$$

粘性流体运动方程是非线性的，要求一般解是很困难的，只能在若干特定情况下求解。求解粘性流体运动方程的方法，一般可分为求简化方程的准确解方法，求近似解方法和求数值解方法。

7.2　流体动力相似原理

对于复杂的粘性流体运动，理论研究和实验研究是相辅相成，并行发展彼此促进的。流体力学实验主要是利用风洞或水工模型等设备来模拟流体流动现象的。实验室模型的形状和尺寸与实物的形状和尺寸一般都有很大差别，实验环境和条件与实物所具备的环境和条件也不可能完全一样。希望花费较少经费就能获得试验所需要的实验数据，很自然地产生了由实验室模型模拟的流体运动与被模拟实物的流体运动之间的相似问题。如何选择实验室模型的形状和尺寸，设计模拟流体运动的实验环境和条件，这就成了开展流体力学实验必须解决的重要问题。流体动力相似理论和因次分析方法提供了解决这一问题的有效途径。

7.2.1　流动现象相似

（1）几何相似

如果两个流动系统的边界具有相同的形状，相同的方位，以及两个流动系统对应点的尺寸具有相同的比例，我们说两个流动系统是几何相似的。设 $l_1, l_2, l_3, \cdots$ 和 $l'_1, l'_2, l'_3, \cdots$ 分别是原型和模型对应点的几何尺寸，两个几何相似的流动系统对应点尺寸之间具有相同的比例，即

$$\frac{l_1}{l'_1} = \frac{l_2}{l'_2} = \frac{l_3}{l'_3} = \cdots = C_l \tag{7.2.1}$$

式中 C_l 是长度比值，称为几何相似常数，它表示模型比较原型对应点几何尺寸缩小或放大的倍数。

（2）时间相似

如果两个流动系统的时间间隔具有相同的比例，其比值称为时间相似常数，类似（7.2.1）式有

$$\frac{t_1}{t'_1} = \frac{t_2}{t'_2} = \frac{t_3}{t'_3} = \cdots = C_t \tag{7.2.2}$$

式中 C_t 是时间间隔的比值，称为时间相似常数。两个流场中，具有几何相似和时间间隔相似的对应点称为时空相似点。

（3）运动相似

设 $u_1, u_2, u_3, \cdots$ 和 $u'_1, u'_2, u'_3, \cdots$ 分别是原型和模型对应点的速度。如果两个流动系统运动相似，则对应点的速度方向一致，大小之比相同，即

$$\frac{u_1}{u'_1} = \frac{u_2}{u'_2} = \frac{u_3}{u'_3} = \cdots = \frac{C_l}{C_t} = C_u \tag{7.2.3}$$

式中 C_u 是速度比值，称为速度相似常数。两个流动系统对应点的加速度也相似，加速度相似常数为

$$C_a = \frac{C_u}{C_t} = \frac{C_l}{C_t^2} \tag{7.2.4}$$

(4)动力相似

动力相似即是力相似，它表示两个流动系统对应点的作用力之比相同，各力的方向对应一致，有

$$\frac{F_1}{F_1'} = \frac{F_2}{F_2'} = \frac{F_3}{F_3'} = \cdots = C_F \tag{7.2.5}$$

式中 C_F 是力的比值，称为力相似常数。

(5)物性相似

两个流动系统对应点的流体性质相似，可以认为是物性相似。如果两个流动系统对应点的密度之比为常数，有密度相似常数 C_ρ；如果两个流动系统对应点的粘度之比为常数，有粘度相似常数 C_μ。

流动现象相似的两个流动系统，它们对应的各有关物理量之间存在惟一的相似常数，但是这些相似常数要受到所谓相似准数的制约，相似常数不能同时各自任意变化。

7.2.2 相似准则

(1)不可压缩粘性流体方程组

在直角坐标系中，设外力是重力，其方向沿 z 轴的负方向，流体流动系统遵循的不可压缩粘性流体方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_x}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_y}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = -g - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) \end{cases} \tag{7.2.6}$$

边界条件：

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \text{在固壁上} \quad \boldsymbol{u} = 0 \\ &2)\ \text{在自由面上} \quad p_{nn} = -p_0, p_{n\tau} = 0 \\ &3)\ \text{在无穷远处} \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_\infty \end{aligned}\right\} \tag{7.2.7}$$

初始条件：

在 $t = t_0$ 时，

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x, y, z), p = p(x, y, z) \tag{7.2.8}$$

两个相似的流体系统，每个流体系统中的粘性流动，都必须遵循流体运动的基本方程形式(7.2.6)。例如对于 z 方向的运动，原型遵循的运动方程形式为

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) \tag{7.2.9}$$

对于 z 方向的运动，模型遵循的运动方程形式为

$$\frac{\partial u_z'}{\partial t'}+u_x'\frac{\partial u_z'}{\partial x}+u_y'\frac{\partial u_z'}{\partial y'}+u_z'\frac{\partial u_z'}{\partial z'}=-g'-\frac{1}{\rho'}\frac{\partial p'}{\partial z'}+\nu'\left(\frac{\partial^2 u_z'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 u_z'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 u_z'}{\partial z'^2}\right) \qquad (7.2.10)$$

(2) **相似常数间的制约关系**

两个相似的流体系统，对应的各个物理量之间存在下面的关系：

$$\left.\begin{aligned} &u_x=C_u u_x',u_y=C_u u_y',u_z=C_u u_z',p=C_p p'\\ &x=C_l x',y=C_l y',z=C_l z',t=C_t t'\\ &g=C_g g',\rho=C_\rho \rho',\nu=C_\nu \nu'=\frac{C_\mu}{C_\rho}\frac{\mu'}{\rho'}\end{aligned}\right\} \qquad (7.2.11)$$

将(7.2.11)中各式代入(7.2.9)式，得到用模型参数表示的原型在 z 方向的运动方程

$$\begin{aligned}&\frac{C_u}{C_t}\frac{\partial u_z'}{\partial t'}+\frac{C_u^2}{C_l}\left(u_x'\frac{\partial u_z'}{\partial x}+u_y'\frac{\partial u_z'}{\partial y'}+u_z'\frac{\partial u_z'}{\partial z'}\right)=-C_g g'\\ &-\frac{C_p}{C_\rho C_l}\frac{1}{\rho'}\frac{\partial p'}{\partial z'}+\frac{C_\mu C_u}{C_\rho C_l^2}\nu'\left(\frac{\partial^2 u_z'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 u_z'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 u_z'}{\partial z'^2}\right)\end{aligned} \qquad (7.2.12)$$

在同一坐标系中，原型在 z 方向的运动方程(7.2.12)和(7.2.9)式表达形式相同，因此，(7.2.12)式中由相似常数组成的无因次系数应相等，即

$$\underset{①}{\frac{C_u}{C_t}}=\underset{②}{\frac{C_u^2}{C_l}}=\underset{③}{C_g}=\underset{④}{\frac{C_p}{C_\rho C_l}}=\underset{⑤}{\frac{C_\mu C_u}{C_\rho C_l^2}} \qquad (7.2.13)$$

上式中每一项代表一种力，它们依次是：①当地惯性力，②变位惯性力，③彻体力(即质量力)，④压力，⑤粘性力。由(7.2.13)式可知，相似常数之间关系是受到彼此制约的。通常用变位惯性力②与所选择的其他作用力相比，得到一系列称为相似准数的无因次数。这里得到的相似准数是斯特罗哈数 St、佛鲁特数 Fr、欧拉数 Eu 和雷诺数 Re。

(3) **斯特罗哈数 St**

在(7.2.13)式中，令① = ②，得到$\frac{C_l}{C_u C_t}=1$，即$\frac{l}{ut}=\frac{l'}{u't'}$，这是一个由 l,u,t 组成的无因次数群，用 St 表示，称为斯特罗哈数。如果以 L 代表系统的几何特征尺寸，U 代表系统的特征速度，T 代表系统的特征时间，斯特罗哈数可表示为

$$\mathrm{St}=\frac{L}{UT} \qquad (7.2.14)$$

斯特罗哈数是当地惯性力①与变位惯性力②之比。因为斯特罗哈数与时间有关，通常称为非定常相似准数。

(4) **佛鲁特数 Fr**

在(7.2.13)式中，令② = ③，得到$\frac{C_u^2}{C_l C_g}=1$，即$\frac{u^2}{gl}=\frac{u'^2}{g'l'}$，这是一个由 u,g,l 组成的无因次数群，用 Fr 表示，称为佛鲁特数。佛鲁特数可用系统的特征参数表示为

$$\mathrm{Fr}=\frac{U^2}{gL} \qquad (7.2.15)$$

佛鲁特数是变位惯性力②与重力③之比，通常称为重力相似准数。

(5)欧拉数 Eu

在(7.2.13)式中,令②=④,得到$\frac{C_p}{C_u^2C_\rho}=1$,即$\frac{p}{\rho u^2}=\frac{p'}{\rho' u'^2}$,这是一个由$p,\rho,u$组成的无因次数群,用 Eu 表示,称为欧拉数。欧拉数可用系统的特征参数表示为

$$\mathrm{Eu}=\frac{P}{\rho U^2} \tag{7.2.16}$$

式中P为系统的特征压力。欧拉数是变位惯性力②与压力④之比,通常称为压力相似准数。

(6)雷诺数 Re

在(7.2.13)式中,令②=⑤,得到$\frac{C_uC_lC_\rho}{C_\mu}=1$,即$\frac{ul\rho}{\mu}=\frac{u'l'\rho'}{\mu'}$,这是一个由$u,l,\rho,\mu$组成的无因次数群,用 Re 表示,称为雷诺数。雷诺数可用系统的特征参数表示为

$$\mathrm{Re}=\frac{UL\rho}{\mu}=\frac{UL}{\nu} \tag{7.2.17}$$

欧拉数是变位惯性力②与粘性力⑤之比,通常称为粘性相似准数。

无量纲数 St(斯特罗哈数)、Fr(佛鲁特数)、Eu(欧拉数)、Re(雷诺数)称为相似准则。如果流体流动问题中不存在自由面,则特征压力$P=\rho U^2$,于是欧拉数 Eu=1,这种情况下欧拉数 Eu 不会引进相似准则中来。在定常流动问题中,斯特罗哈数 St 不会出现;在外力可以忽略的情况下,佛鲁特数 Fr 不出现。可以证明,相似准则中只有斯特罗哈数 St、雷诺数 Re、佛鲁特数 Fr 是独立的,而欧拉数 Eu 是 St,Re 和 Fr 的函数。

7.2.3 流体动力相似原理

相似律

两个流动力学相似的必要条件为:

$$(\mathrm{St})_1=(\mathrm{St})_2,(\mathrm{Eu})_1=(\mathrm{Eu})_2,(\mathrm{Re})_1=(\mathrm{Re})_2,(\mathrm{Fr})_1=(\mathrm{Fr})_2 \tag{7.2.18}$$

力学相似的充分条件为:

1)$(\mathrm{St})_1=(\mathrm{St})_2,(\mathrm{Eu})_1=(\mathrm{Eu})_2,(\mathrm{Re})_1=(\mathrm{Re})_2,(\mathrm{Fr})_1=(\mathrm{Fr})_2$;

2)两个流动的来流冲角相等,即$\alpha_1=\alpha_2$;

3)在自由界面上,$\frac{(p_0)_1}{P_1}=\frac{(p_0)_2}{P_2}$;

4)初始条件相等。

(7.2.19)

两个流动力学相似的充分必要条件称为相似律。由于欧拉数 Eu 是 St,Re 和 Fr 的函数,所以(7.2.19)式中可以去掉$(\mathrm{Eu})_1=(\mathrm{Eu})_2$。

为了使实物与模型产生的运动力学相似,相似律告诉我们,模型除了应该满足和实物几何相似的条件外,还必须保证遵循相似性准则,以及粘性流体流动的力学相似的充分必要条件。在对实物进行风载荷试验时,要求模型试验的设计承载风速与实物风载荷环境的雷诺数相等,即

$$\frac{U'L'}{\nu'}=\frac{UL}{\nu}$$

如果模型和实物环境中的流体介质都是空气,则运动粘度相等($\nu'=\nu$)。假如风载荷试验

用2m的模型来模拟400m的实物，就要求试验用的风洞气流速度U'是实物设计承载风速U的200倍。温度为20℃时，空气的运动粘度$\nu = 1.5\times10^{-5}\mathrm{m^2/s}$，设计实物承载风速若为$U = 1\mathrm{m/s}$，则雷诺数$\mathrm{Re}\approx2.67\times10^7$。风洞提供给模型的气流速度$U' = 15\mathrm{m/s}$，模型的雷诺数$\mathrm{Re}\approx 2\times10^6$，二者数值相差十几倍。一般的风洞试验雷诺数只能达到2×10^6左右，相似律往往不能得到严格满足。因此，对于得到的实验数据，还需要根据经验修正后才能应用到实际中去。增大模型尺寸可以得到较大的雷诺数，但是需要增大风洞直径。如果改变空气密度，也可以达到提高风洞试验雷诺数的目的。

相似律可以指导试验研究和实验数据的整理，下面以绕流为例来说明。设ν,ρ,L,U分别代表流体的粘度、密度、特征长度（物体长度）和特征速度。水力学中，物体受到的阻力R只依赖于ν,ρ,L,U四个参数。如果用实验方法求阻力R与ν,ρ,L,U之间的关系，必须对ν,ρ,L,U进行大量实验，并将实验数据整理成这四个参数的图表，然后编制篇幅很多的手册备查。应用相似律，可以得到阻力系数只是雷诺数的函数的结论。于是，不必对ν,ρ,L,U去做大量的实验，而只需要对一种流体在不同流速下测出阻力就行了。用较少的实验可以得到阻力系数曲线，从而根据不同的ν,ρ,L,U求出阻力，实验工作因此大为减少。

7.3　小雷诺数下的绕流

不可压缩流体的运动方程中如果不计重力，还有压力、惯性力和粘性力。压力是平衡惯性力和粘性力的反作用力，要受到惯性力和粘性力的制约。运动方程中真正起主导作用的力是惯性力和粘性力，而惯性力和粘性力的比是雷诺数，即$\mathrm{Re} = UL/\nu$。雷诺数Re中U和L分别是所研究问题的特征速度和特征长度，ν是流体的运动粘性系数。研究运动方程中的惯性力和粘性力的关系问题，就是研究关于雷诺数Re的流动问题。通常人们关心的是小雷诺数问题和大雷诺数问题，因为这两类极端情形的问题可以采用近似方法解决。至于雷诺数不大也不小的所谓中等雷诺数的流体流动问题，惯性力和粘性力同阶，它们对流动的影响差不多，不能对运动方程组作任何近似。

7.3.1　小雷诺数流动特点

如果所研究的问题中，特征速度U和特征长度L都比较小，流体的粘性系数比较大时，这类问题的雷诺数Re就比较小，称为小雷诺数问题。对于小雷诺数问题，雷诺数Re小意味着粘性力的量阶比惯性力的量阶大得多，粘性力对流动起主要作用，惯性力可以作为零级近似而被全部忽略掉。粘性很大的流体在细长管道中作低速流动，或者尺度很小的物体在粘性很大的流体中运动，都是所谓小雷诺数问题。

小雷诺数问题的运动方程组简化为

$$\begin{cases}\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0\\ \mathrm{grad}p = \mu\Delta\boldsymbol{u}\end{cases}\tag{7.3.1}$$

上式是惯性力作为零级近似被全部忽略后得到的线性方程组。

7.3.2　圆球绕流

我们来考察圆球在流场中受到阻力的小雷诺数问题。设圆球半径为a，以速度U_∞在无界

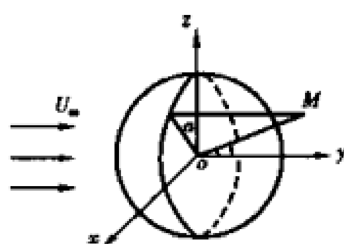


图 7.3 圆球绕流

粘性不可压缩流体中作等速运动。根据相对性原理，这一问题等价于无穷远处粘性不可压缩流体绕圆球的定常流动，来流速度为 U_∞。取球坐标系(r,θ,φ)，θ 起算的 x 轴线方向与来流方向重合，如图 7.3 所示。由于圆球绕流是定常流动，且具有轴对称性，于是有

$$\frac{\partial}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial}{\partial\varphi}=0,\quad u_\varphi=0$$

将方程组(7.3.1)式写成球坐标形式为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_r}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{2u_r}{r}+\dfrac{u_\theta\cot\theta}{r}=0\\[2ex]\dfrac{\partial p}{\partial r}=\mu\left(\dfrac{\partial^2u_r}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2u_r}{\partial\theta^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial r}+\dfrac{\cot\theta}{r^2}\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}-\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}-\dfrac{2u_r}{r^2}-\dfrac{2\cot\theta}{r^2}u_\theta\right)\\[2ex]\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial\theta}=\mu\left(\dfrac{\partial^2u_\theta}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2u_\theta}{\partial\theta^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}+\dfrac{\cot\theta}{r^2}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}-\dfrac{u_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right)\end{cases}\tag{7.3.2}$$

方程组(7.3.2)是由三个偏微分方程组成的线性方程组，有三个未知函数，它们是

$$u_r(r,\theta),\quad u_\theta(r,\theta),\quad p(r,\theta)$$

边界条件为：

在圆球 $r=a$ 上

$$u_r=0,\quad u_\theta=0\tag{7.3.3}$$

在无穷远处

$$u_r=U_\infty\cos\theta,\quad u_\theta=-U_\infty\sin\theta\tag{7.3.4}$$

(1)绕流速度分布和压力分布

求解偏微分线性方程组(7.3.2)可以采用分离变量法。为此，将三个未知函数表示成

$$u_r=f(r)F(\theta),\quad u_\theta=g(r)G(\theta),\quad p=\mu h(r)H(\theta)+p_\infty\tag{7.3.5}$$

代入(7.3.4)式，得到在无穷远处的表达式

$$U_\infty\cos\theta=f(\infty)F(\theta),\quad -U_\infty\sin\theta=g(\infty)G(\theta)$$

由此推出

$$f(r)=U_\infty,\quad F(\theta)=\cos\theta,\quad g(r)=U_\infty,\quad G(\theta)=-\sin\theta$$

于是，可以将 u_r 和 u_θ 写为

$$u_r=f(r)\cos\theta,\quad u_\theta=-g(r)\sin\theta\tag{7.3.6}$$

将上式中的 u_r，u_θ 和(7.3.5)式中的 p 的表达式，代入方程组(7.3.2)式和边界条件(7.3.2)式得到

$$\begin{cases}\left(f'-\dfrac{g}{r}+\dfrac{2f}{r}-\dfrac{g}{f}\right)\cos\theta=0\\[2ex]H(\theta)h'(r)=\left(f''-\dfrac{f}{r^2}+\dfrac{2f'}{r}-\dfrac{f}{r^2}+\dfrac{2g}{r^2}-\dfrac{2f}{r^2}+\dfrac{2g}{r^2}\right)\cos\theta\\[2ex]H'(\theta)\dfrac{h}{r}=\left(-g''+\dfrac{g}{r^2}-\dfrac{2g'}{r}-\dfrac{g}{r^2}\cot^2\theta-\dfrac{2f}{r^2}+\dfrac{g}{r^2}\csc^2\theta\right)\sin\theta\end{cases}\tag{7.3.7}$$

边界条件是

$$f(a)=0,\quad g(a)=0,\quad f(\infty)=U_\infty,\quad g(\infty)=U_\infty \tag{7.3.8}$$

由方程组(7.3.7)可以看出，$H(\theta)$应取 $\cos\theta$ 才能分离变数。于是(7.3.5)式可写为

$$u_r=f(r)\cos\theta,\quad u_\theta=-g(r)\sin\theta,\quad p=\mu h(r)\cos\theta+p_\infty \tag{7.3.9}$$

方程组(7.3.7)变成

$$\begin{cases}1)\quad f'+\dfrac{2(f-g)}{r}=0\\[2mm] 2)\quad f''+\dfrac{2}{r}f'-\dfrac{4(f-g)}{r^2}=h'\\[2mm] 3)\quad g''+\dfrac{2}{r}g'+\dfrac{2(f-g)}{r^2}=\dfrac{h}{r}\end{cases} \tag{7.3.10}$$

边界条件仍然是(7.3.8)式。由方程组(7.3.8)中的1)式可以得到用f表示的函数g，即

$$g=\frac{r}{2}f'+f \tag{7.3.11}$$

将(7.3.11)式代入方程组(7.3.8)中的3)式，可以得到用f表示的函数h，即

$$h=\frac{1}{2}r^2f'''+3rf''+2f' \tag{7.3.12}$$

将上式和(7.3.11)式代入方程组(7.3.8)中的2)式，得到下面确定f的微分方程

$$r^3f''''+8r^2f'''+8rf''-8f'=0 \tag{7.3.13}$$

微分方程(7.3.13)是解具有r^k形式的欧拉方程。指数k是下列代数方程的解

$$k(k-1)(k-2)(k-3)+8k(k-1)(k-2)+8k(k-1)-8k=0$$

解得 $k=0,2,-1,-3$。因此，微分方程(7.3.13)的通解形式为

$$f=\frac{A}{r^3}+\frac{B}{r}+C+Dr^2 \tag{7.3.14}$$

将上式代入(7.3.11)和(7.3.12)式，得

$$g=-\frac{A}{2r^3}+\frac{B}{2r}+C+2Dr^2 \tag{7.3.15}$$

$$h=\frac{B}{r^2}+10rD \tag{7.3.16}$$

由边界条件(7.3.8)式可以确定(7.3.14)，(7.3.15)和(7.3.16)式中的任意常数A,B,C,D。经过计算得到

$$A=\frac{1}{2}U_\infty a^3,\quad B=-\frac{3}{2}U_\infty a,\quad C=U_\infty,\quad D=0$$

将确定的任意常数A,B,C,D代回(7.3.14)，(7.3.15)和(7.3.16)式，得

$$\begin{cases}f=\dfrac{1}{2}U_\infty\dfrac{a^3}{r^3}-\dfrac{3}{2}U_\infty\dfrac{a}{r}+U_\infty\\[2mm] g=-\dfrac{1}{4}U_\infty\dfrac{a^3}{r^3}-\dfrac{3}{4}U_\infty\dfrac{a}{r}+U_\infty\\[2mm] h=-\dfrac{3}{2}U_\infty\dfrac{a}{r^2}\end{cases} \tag{7.3.17}$$

将上式代入(7.3.9)式，即得圆球绕流的速度分布和压力分布

$$
\begin{cases}
u_r(r,\theta) = U_\infty\left(1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{a}{r} + \dfrac{1}{2}\dfrac{a^3}{r^3}\right)\cos\theta \\
u_\theta(r,\theta) = -U_\infty\left(1 - \dfrac{3}{4}\dfrac{a}{r} - \dfrac{1}{4}\dfrac{a^3}{r^3}\right)\sin\theta \\
p(r,\theta) = -\dfrac{3}{2}\mu\dfrac{U_\infty a}{r^2}\cos\theta + p_\infty
\end{cases}
\tag{7.3.18}
$$

(2)斯托克斯公式

为了计算圆球受到的阻力，先来考察作用在球上的粘性力 $\boldsymbol{p}_r$。粘性力 $\boldsymbol{p}_r$ 的三个分量为

$$
\begin{cases}
p_{rr} = -p + 2\mu\dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\
p_{r\theta} = \mu\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r}\right) \\
p_{r\varphi} = \mu\left(\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \dfrac{u_\varphi}{r}\right)
\end{cases}
\tag{7.3.19}
$$

在(7.3.19)式中，根据绕流的对称性，$u_\varphi = 0, \dfrac{\partial}{\partial\varphi} = 0$，可知压力分量 $p_{r\varphi} = 0$；由流体粘附条件还知道球面上 $u_r = u_\theta = 0$，可以推出球面上 $\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta} = 0, \dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta} = 0$。由方程组(7.3.2)的连续性方程式中，可得 $\dfrac{\partial u_r}{\partial r} = 0$。将以上条件代入(7.3.19)式中，得

$$
p_{rr} = -p, \quad p_{r\theta} = \mu\frac{\partial u_\theta}{\partial r}, \quad p_{r\varphi} = 0 \tag{7.3.20}
$$

将速度分布和压力分布表达式(7.3.18)代入上式，得

$$
\begin{cases}
p_{rr} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\mu U_\infty}{a}\cos\theta - p_\infty \\
p_{r\theta} = -\dfrac{3\mu U_\infty}{2a}\sin\theta
\end{cases}
\tag{7.3.21}
$$

整个流动对于 x 轴是轴对称的，因此作用于圆球上的所有作用力均沿 x 轴，其合力是圆球阻力，即

$$
\begin{aligned}
W &= \int_S (p_{rr}\cos\theta - p_{r\theta}\sin\theta)\mathrm{d}S = \int_0^\pi (p_{rr}\cos\theta - p_{r\theta}\sin\theta)2\pi a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta = \\
&2\pi a^2\int_0^\pi\left(\frac{3\mu U_\infty}{2a}\cos^2\theta + \frac{3\mu U_\infty}{2a}\sin^2\theta\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta - 2\pi a^2 p_\infty\int_0^\pi\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta = \\
&3\pi\mu U_\infty a\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta = 6\pi\mu U_\infty a
\end{aligned}
\tag{7.3.22}
$$

上式称为斯托克斯公式。斯托克斯公式(7.3.22)表明，圆球所受阻力与来流速度 U_∞ 成正比，与圆球半径 a 成正比，与粘性系数 μ 成正比。

由(7.3.22)式可以确定阻力系数 C_x

$$
C_x = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2\pi a^2} = \frac{12\nu}{aU_\infty} = \frac{24}{\mathrm{Re}} \tag{7.3.23}
$$

其中雷诺数 $\mathrm{Re}=\dfrac{dU_\infty}{\nu}$，$d$ 是圆球直径。(7.3.23)式说明阻力系数 C_∞ 与雷诺数 Re 成反比。

斯托克斯公式(7.3.22)在雷诺数 Re < 1 时与实验相当符合。斯托克斯公式只适用于流体的粘性系数 μ 很大，或者物体的尺寸很小，运动很慢这种小雷诺数(Re < 1)情况。为了具体说明这种情况，我们考察以等速 u 下降的小水滴受到的空气阻力。设空气阻力可按斯托克斯公式计算，水滴受到的重力与浮力与空气阻力抵消

$$\frac{4}{3}\pi a^3(\rho_{H_2O}-\rho)g = 6\pi\rho\nu ua$$

式中 ρ_{H_2O} 是水的密度，ρ 和 ν 分别是空气的密度和运动粘度。由于空气密度 ρ 比水的密度小得多，左边第二项可以忽略。于是求得水滴下降速度 u 为

$$u = \frac{2}{9}\frac{\rho}{\rho_{H_2O}\nu}ga^2$$

引进雷诺数 $\mathrm{Re}=\dfrac{ua}{\nu}$，上式可以改写为

$$u^3 = \frac{2}{9}g\nu\mathrm{Re}^2\frac{\rho_{H_2O}}{\rho}$$

将 $\nu=0.133\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$，$g=981\mathrm{cm/s}^2$，$\rho_{H_2O}/\rho=770$，Re < 1 代入，得

$$a < 0.0047\mathrm{cm},\quad u < 28\mathrm{cm/s}$$

可见，这种小雷诺数水滴在空气中下降的情况，相当于雾滴的飘浮下降运动。

对于小雷诺数问题，意味着粘性力的量阶比惯性力的量阶大得多，粘性力对流动起主要作用，惯性力可以作为零级近似而被全部忽略，从而可以简化对这类流体运动的分析和计算。

7.4　大雷诺数下的绕流

大自然中最主要的流体是水和空气，它们的粘性系数 μ 都很小，如果物体的特征尺寸和特征速度不太小，雷诺数 Re 就可能达到很高的数值。研究大雷诺数情形下的流体流动具有重大的实际意义。

20 世纪初期，普朗特提出了一个重大假定，即粘性的影响仅存在于固体壁面附近的边界层中，认为边界层以外的流体流动可以看成是理想的。边界层概念的提出，在理想流体力学和粘性流体力学的研究之间架设了一座桥梁。经过近一个世纪的理论和实验研究，边界层理论已经成为流体力学中极为重要的分支学科。尽管边界层概念至今还没有严格的数学证明，但是边界层理论有可靠的实验基础，其结论已为实验所证明。边界层理论是传热、传质理论的基础，它提供了分析阻力产生机理、阻力计算方法的依据。

人们能够利用边界层理论来近似求解大雷诺数问题，从而计算物体在流体中运动时所遭受到的摩擦阻力和热传递效率。边界层理论还可以阐明理想流体所不能解释的脱体现象，以及说明理想流体理论给出的一些结论与实验结果相当符合的事实，如压力分布和速度分布以及举力等。

7.4.1 大雷诺数流动特点

如果所研究的问题中，特征速度 U 和特征长度 L 都比较大，流体的粘性系数比较小时，这类问题的雷诺数 Re 就比较大，称为大雷诺数问题。对于大雷诺数问题，雷诺数 Re 大意味着惯性力的量阶比粘性力的量阶大得多，粘性力可以作为零级近似而被忽略。但是，如果将粘性力忽略，流动问题转变为理想流体流动问题，显然理想流体运动方程组的解不能满足粘附的边界条件，因此不能全部忽略粘性力。大雷诺数问题只能根据问题的特点，忽略粘性力项中的次要部分，才能将运动方程简化。粘性很小的流体在细长管道中作高速流动，或者尺度很大的物体在粘性很小的流体中运动，都是所谓大雷诺数问题。

7.4.2 平面上的边界层

将平板放置在雷诺数 Re 很大的流体中，根据实验测出流场的速度分布曲线，明显地分成两个性质很不相同的区域，如图 7.4 所示。紧贴平板表面的很薄一层流动区域称为边界层，边界层厚度用符号 δ 表示。边界层外部的整个区域称为外部流动区域。外部流动区域的流动受到物面的滞止作用微弱，平板各个截面上 x 方向的速度分量 u_x 沿 y 轴方向变化缓慢，即速度梯度很小，而且在大雷诺数 Re 的情形下粘性系数 μ 也很小，因此粘性力 τ 比惯性力小得多，可以将粘性力全部忽略，把外部流动区域的流动看成理想流体流动。如果考虑外部流动是速度为 U_∞ 的均匀来流的绕流运动，这样的外部流动是理想无旋流动。在讨论平面上的边界层时，我们考虑的外部流动是理想无旋的。实验测出外部流动流场的速度分布曲线，与理想流体绕流的速度分布是很接近的。远离平板前缘的均匀来流以速度 U_∞ 流向平板，流体一经与平板表面接触便粘附在上面，粘附的流体速度为零，并对邻近的流体层施加粘性阻力，使其速度减慢。减慢了的流体层损失了动量，又对更上一层流体层施加粘性阻力，使之损失动量。粘性阻力如此逐层传递，相邻的流体层一层层减慢速度，使边界层厚度不断增加。随着边界层厚度增加，沿表面的外法线速度逐渐增加，至直垂直距离 δ 处流速接近于来流速度 U_∞，粘性阻力的影响在边界层的边缘接近于零。这个垂直距离 δ 就是边界层的厚度。在平板前缘边界层的厚度为零，离开平板前缘后边界层厚度虽然逐渐发展，但是，在平板表面上受粘性影响的边界层厚度 δ 相对于流动距离总是很小的。

(1)边界层的流动状态

在边界层的起始阶段的流动完全是层流，如图 7.4 中的 A 区。这部分区域的流动不受表面粗糙度的影响，也不管来流是层流还是湍流。由于 A 区的边界层很薄，其中的速度梯度很大，因此形成湍流的可能性不大，显然壁面抑制了湍流的发展。经过一段距离后，边界层厚度不断增加，只要平板足够长，流动状态就会从层流向湍流过渡。形成湍流区后，由于流体微团急剧脉动，使速度分布曲线比层流边界层中的均匀，而且湍流边界层的厚度随距离 x 增长得比较快，湍流边界层的厚度正比于 $x^{0.8}$，而层流边界层的厚度正比于 $x^{0.5}$。湍流边界层和层流边界层的性质差别很大。对于平板上的边界层，从层流向湍流过渡发生时的临界雷诺数为

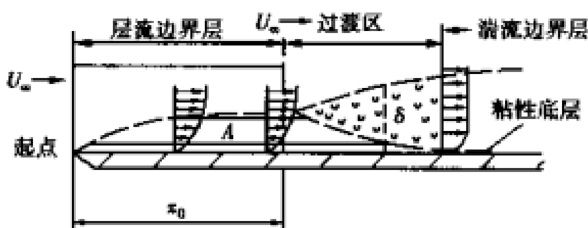


图 7.4 平板边界层的速度分布

$$(\mathrm{Re})_x = \frac{xU_\infty}{\nu} = 5 \times 10^5 \sim 2 \times 10^6$$

其中 x 是距离平板前缘的距离。如果临界雷诺数取边界层厚度 δ,则

$$(\mathrm{Re})_\delta = \frac{\delta U_\infty}{\nu} \approx 4000$$

平板上边界层中的运动是二维流动,其速度分量为 u_x 和 u_y。由于 u_x 比 u_y 大得多,边界层中的流动主要表现在 x 方向,但是流线不和 x 轴线平行。随着边界层不断增长,必定有流体穿过边界层边缘,因此,边界层边缘并不是流线。

边界层内的速度分量 u_x 沿物面法线方向变化迅速,比切向方向的变化高出一个量级。这是因为由于流体的粘性,物面上的流体粘附其上,与物面的相对速度为零。但是,流体离开物面很短一段距离就达到边界层的边界,其速度取外部流动的势流速度值 U_∞。可见边界层内的速度分量 u_x,从零变化到势流速度值 U_∞ 是在很薄的边界层厚度内完成的,其变化非常剧烈,速度梯度很大,尽管粘性系数 μ 很小,边界层内粘性力 τ 仍然可以达到很高的数值。边界层内粘性力的量级与惯性力同阶,对流体流动起着和惯性力同等重要的作用,因此对边界层内的粘性力是绝不能忽略的。边界层内的流动存在强烈的涡旋运动,与外部无旋流动交界处是边界层的边界。

(2)边界层厚度估计

边界层与外流之间很难划定一条明显的界线,通常规定当 $u_x = 0.99U_\infty$ 时

$$y = \delta$$

δ 称为边界层厚度。下面介绍边界层厚度 δ 随坐标 x,来流速度 U_∞ 和粘性系数 ν 的变化关系。

在层流边界层中,单位体积的粘性力等于 $\mu\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$,垂直于壁面的速度梯度为$\dfrac{\partial u_x}{\partial y}$,其量级为$\dfrac{U_\infty}{\delta}$,因此单位体积粘性力的量级为 $\mu\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \sim \mu\dfrac{U_\infty}{\delta^2}$。单位体积惯性力等于 $\rho u_x\dfrac{\partial u_x}{\partial x}$,沿流动方向的速度梯度$\dfrac{\partial u_x}{\partial x}$的量级为$\dfrac{U_\infty}{L}$,$L$ 是平板的长度,因此单位体积惯性力的量级为 $\rho u_x\dfrac{\partial u_x}{\partial x} \sim \rho\dfrac{U_\infty^2}{L}$。由于边界层中粘性力和惯性力有相同的量级,有

$$\mu\frac{U_\infty}{\delta^2} \sim \rho\frac{U_\infty^2}{L}$$

于是边界层的边界满足下列关系式

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu L}{\rho U_\infty}} = \sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}} = L\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty L}} = \frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$$

由上式得

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \tag{7.4.1}$$

可见边界层厚度 δ 和特征长度 L 之比,与雷诺数 Re 的根号值成反比。当 Re 很大时,边界层厚度 δ 和特征长度 L 相比将是一个很小的数值,显然,比值 $\delta' = \delta/L$ 是一个小量。在简化纳维-托克斯方程时,$\delta' = \delta/L$ 可以作为所估计的每一项量阶的估阶标准。

7.4.3 普朗特边界层方程

取直角坐标系 oxy，x 轴与平板重合，y 轴垂直于平板，二维不可压缩流体基本方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_x}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)\\ \dfrac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_y}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right)\end{cases}\tag{7.4.2}$$

引进无量纲量

$$\begin{cases}u_x'=\dfrac{u_x}{U_\infty},\quad u_y'=\dfrac{u_y}{U_\infty},\quad p'=\dfrac{p}{\rho U_\infty^2}\\ x'=\dfrac{x}{L},\quad y'=\dfrac{y}{L},\quad t'=\dfrac{t}{T}\end{cases}\tag{7.4.3}$$

其中 U_∞ 是特征速度，L 是特征长度，T 是特征时间。将(7.4.3)式代入基本方程组(7.4.2)，使之无量纲化后得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_x'}{\partial x'}+\dfrac{\partial u_y'}{\partial y'}=0\\ \mathrm{St}\dfrac{\partial u_x'}{\partial t'}+u_x'\dfrac{\partial u_x'}{\partial x'}+u_y'\dfrac{\partial u_x'}{\partial y'}=-\dfrac{\partial p'}{\partial x'}+\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u_x'}{\partial x'^2}+\dfrac{\partial^2 u_x'}{\partial y'^2}\right)\\ \mathrm{St}\dfrac{\partial u_y'}{\partial t'}+u_x'\dfrac{\partial u_y'}{\partial x'}+u_y'\dfrac{\partial u_y'}{\partial y'}=-\dfrac{\partial p'}{\partial y'}+\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u_y'}{\partial x'^2}+\dfrac{\partial^2 u_y'}{\partial y'^2}\right)\end{cases}\tag{7.4.4}$$

为了简化基本方程组(7.4.2)，必须在边界层内对基本方程组(7.4.4)中每一项估计它们的量阶。所谓量阶不是指物理量或几何量的具体数值，而是指该量在整个边界层内相对于标准小参数的平均水平。在边界层问题中，选取小量 $\delta'=\delta/L$ 作为估阶标准。

对 u_x' 及其各阶导数的量阶估计如下：

在边界层内 u_x 与 U_∞ 同量阶，因此 u_x' 与 1 同量阶，表示为

$$u_x'\sim 1$$

当 y' 由 0 变到 δ' 时，u_x' 从 0 变到与 1 同阶的量，于是 $\partial u_x'/\partial y'$，$\partial^2 u_x'/\partial y'^2$ 的量阶分别为

$$\frac{\partial u_x'}{\partial y'}\sim\frac{1}{\delta'},\quad \frac{\partial^2 u_x'}{\partial y'^2}\sim\frac{1}{\delta'^2}$$

当 x' 由平板端点变化到与 1 同阶的量时，u_x' 变化到了与 1 同阶的量，于是 $\partial u_x'/\partial x'$ 和 $\partial^2 u_x'/\partial x'^2$ 的量阶分别为

$$\frac{\partial u_x'}{\partial x'}\sim 1,\quad \frac{\partial^2 u_x'}{\partial x'^2}\sim 1$$

对 u_y' 及其各阶导数的量阶估计如下：

由连续性方程推出 $\dfrac{\partial u_y'}{\partial y'}=-\dfrac{\partial u_x'}{\partial x'}\sim 1$，则 $u_y'=\int_0^{y'}\dfrac{\partial u_y'}{\partial y'}dy'\sim\delta'$，于是可以得到

$$\frac{\partial u_y'}{\partial x'}\sim\delta',\quad \frac{\partial^2 u_y'}{\partial x'^2}\sim\delta',\quad \frac{\partial u_y'}{\partial y'}\sim 1,\quad \frac{\partial^2 u_y'}{\partial y'^2}\sim\frac{1}{\delta'}$$

从上面对 u_x', u_y' 及其各阶导数的估阶，得出结论：

在边界层内 u_y' 比 u_x' 低一阶，u_y' 是一个与 δ' 量阶同阶的小量；速度分量 u_x', u_y' 沿 y' 方向的偏导数 $\partial/\partial y'$ 比沿 x' 方向的偏导数 $\partial/\partial x'$ 要高一阶。

对 $\mathrm{St}\dfrac{\partial u_x'}{\partial t'}, \mathrm{St}\dfrac{\partial u_y'}{\partial t'}$ 的量阶估计如下：

$$\mathrm{St}\frac{\partial u_x'}{\partial t'} \sim u_x'\frac{\partial u_x'}{\partial x'} \sim 1, \quad \mathrm{St}\frac{\partial u_y'}{\partial t'} \sim u_x'\frac{\partial u_y'}{\partial x'} \sim \delta'$$

也就是说，x' 和 y' 方向的局部导数分别与它们的位变导数同阶，但是 y' 方向的局部导数比 x' 方向的要小一个量阶。

对 $\dfrac{\partial p'}{\partial x'}, \dfrac{\partial p'}{\partial y'}$ 的量阶估计如下：

压力梯度是被动力，其量阶要由惯性力和粘性力中的最大量阶来决定，而在同一方向上惯性力和粘性力是同阶的。x' 方向的惯性力和粘性力的量阶估计为1，y' 方向的惯性力和粘性力的量阶估计为 δ'，因此 $\dfrac{\partial p'}{\partial x'}, \dfrac{\partial p'}{\partial y'}$ 的量阶分别为

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} \sim 1, \quad \frac{\partial p'}{\partial y'} \sim \delta'$$

在无量纲基本方程组(7.4.4)各个方程的上方，根据上面估计的量阶来注明每一项的量阶，连续性方程为

$$\overset{1}{\frac{\partial u_x'}{\partial x'}} + \overset{1}{\frac{\partial u_y'}{\partial y'}} = 0 \tag{7.4.5a}$$

运动方程（纳维-斯托克斯方程）为

$$\begin{cases} \overset{1}{\mathrm{St}\dfrac{\partial u_x'}{\partial t'}} + \overset{1}{u_x'}\overset{1}{\dfrac{\partial u_x'}{\partial x'}} + \overset{\delta'}{u_y'}\overset{\frac{1}{\delta'}}{\dfrac{\partial u_x'}{\partial y'}} = -\overset{1}{\dfrac{\partial p'}{\partial x'}} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\overset{1}{\dfrac{\partial^2 u_x'}{\partial x'^2}} + \overset{\frac{1}{\delta'^2}}{\dfrac{\partial^2 u_x'}{\partial y'^2}}\right) \\ \overset{\delta'}{\mathrm{St}\dfrac{\partial u_y'}{\partial t'}} + \overset{1}{u_x'}\overset{\delta'}{\dfrac{\partial u_y'}{\partial x'}} + \overset{\delta'}{u_y'}\overset{1}{\dfrac{\partial u_y'}{\partial y'}} = -\overset{\delta'}{\dfrac{\partial p'}{\partial y'}} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\overset{\delta'}{\dfrac{\partial^2 u_y'}{\partial x'^2}} + \overset{\frac{1}{\delta'}}{\dfrac{\partial^2 u_y'}{\partial y'^2}}\right) \end{cases} \tag{7.4.5b}$$

根据 x' 方向的惯性力和粘性力同阶的假定，由(7.4.5b)式可得到 $\dfrac{1}{\mathrm{Re}\delta'^2}$，或 $\delta' \sim \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$，即 $\delta \sim \sqrt{\nu L/U_\infty}$。在大雷诺数情形，当 δ 很小时，这一边界层厚度的量阶估计表达式就变成上面由定性分析得到的(7.4.1)式。通过计算，可以得到平板边界层的厚度 δ 与 L 之比为

$$\frac{\delta}{L} = \frac{50}{\sqrt{(\mathrm{Re})_L}} \tag{7.4.6}$$

根据方程(7.4.5a)和(7.4.5b)式中的各项量阶情况，忽略高阶小量后可以简化纳维-斯托克斯方程。方程中重要的简化有两个：略去量阶比 $\dfrac{\partial^2 u_x'}{\partial y'^2}, \dfrac{\partial^2 u_y'}{\partial y'^2}$ 低两阶的 $\dfrac{\partial^2 u_x'}{\partial x'^2}, \dfrac{\partial^2 u_y'}{\partial x'^2}$；与 $\dfrac{\partial p'}{\partial x'}$ 相

比，$\frac{\partial p'}{\partial y'}=0$。对方程(7.4.5a)和(7.4.5b)式作了上面两个简化后，得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_x'}{\partial x'}+\dfrac{\partial u_y'}{\partial y'}=0\\[2ex]\mathrm{St}\,\dfrac{\partial u_x'}{\partial t'}+u_x'\dfrac{\partial u_x'}{\partial x'}+u_y'\dfrac{\partial u_x'}{\partial y'}=-\dfrac{\partial p'}{\partial x'}+\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial^2 u_x'}{\partial y'^2}\end{cases}$$

将上面的方程组转换为有量纲形式后为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}=0\\[2ex]\dfrac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_x}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\end{cases}\tag{7.4.7}$$

方程组(7.4.7)的边界条件是：

在物面 $y=0$ 上，满足粘附条件 $u_x=u_y=0$；

在边界层外部边界 $y=\delta$ 上，$u_x=U_\infty(x)$，$U_\infty(x)$ 是边界层外部边界上外流的速度分布。

方程组(7.4.6)的初始条件是：

在 $t=t_0$ 时，已知 u_x,u_y 的速度分布。

因为 $\partial p'/\partial y'=0$，可以认为在边界层内压力数值沿 y 方向不改变。据此普朗特建议，边界层内的压力分布就是边界层边线上的压力分布，即是理想流体绕物体流动时物面上的压力分布。在物面上理想流体运动方程的形式为

$$\frac{\partial U_\infty}{\partial t}+U_\infty\frac{\partial U_\infty}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\tag{7.4.8}$$

结合方程(7.4.8)，方程组(7.4.7)可写成

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}=0\\[2ex]\dfrac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\dfrac{\partial u_y}{\partial y}=\dfrac{\partial U_\infty}{\partial y}+U_\infty\dfrac{\partial U_\infty}{\partial x}+\nu\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\end{cases}\tag{7.4.9}$$

上式是用以确定未知函数 $u_x(x,y,t)$ 和 $u_y(x,y,t)$ 的非线性偏微分方程组。方程组(7.4.9)称为普朗特边界层方程。

方程组(7.4.9)的边界条件为：

在物面 $y=0$ 上，$u_x=u_y=0$；在 $y=\delta$ 上，$u_x=U_\infty(x,t)$；

初始条件为：

当 $t=t_0$ 时，已知 u_x,u_y 的速度分布。

如果曲面的曲率半径 R 不太小，即曲率半径 R 较边界层厚度 δ 大得多，以及曲面的曲率半径 R 随 x 的变化率 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}x$ 变化不太大，曲面上边界层方程组的形式和平板边界层方程组(7.4.9)将完全一样。只是平板边界层方程组是在直角坐标系中导出的，而曲面边界层方程组是在边界层坐标系中导出的。所谓边界层坐标系是指这样的正交坐标系，曲线坐标 x 取在物面上，曲线坐标 y 与物面垂直。

7.4.4 摩擦阻力

物体表面对运动流体的摩擦阻力，正比于流体在壁面处的法向速度梯度。如果已知边界

层中的速度分布，壁面上的切应力则为 $\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_{y=0}$。

根据对边界层厚度的量级估计和对边界层中速度梯度的量级估计，可知

$$\tau_w \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta} \sim \mu U_\infty \sqrt{\frac{\rho U_\infty}{\mu L}} = \sqrt{\frac{\mu \rho U_\infty^3}{L}} \tag{7.4.10}$$

上式表明，在壁面附近切应力 τ_w 与运动速度 U_∞ 的$\frac{3}{2}$次方成比例。

长为 L，宽为 b 的平板壁上，边界层内流体阻力为

$$F_d = bL\tau_w \tag{7.4.11}$$

将(7.4.10)式代入上式，得

$$F_d \sim b\sqrt{\rho \mu U_\infty^3 L} \tag{7.4.12}$$

由上式可知，层流时对摩擦阻力 F_d 与 $U_\infty^{3/2}$ 和 $L^{1/2}$ 成比例。由于边界层厚度随着板增长而增加，板后面部分的阻力较前面部分小，因此尽管板的长度加倍，但阻力并没有加倍。

阻力系数 C_d 是阻力与动压头之比，即

$$C_d = \frac{F_d}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 bL} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_\infty L}} = \frac{1}{\sqrt{(\mathrm{Re})_L}} \tag{7.4.13}$$

通过计算，可以得到平板边界层的阻力系数为

$$C_d = \frac{1.328}{\sqrt{(\mathrm{Re})_L}} \tag{7.4.14}$$

7.5　涡旋诱发振动

大雷诺数绕流运动中，当流体流过非流线型物体时，通常会发生边界层脱离固体壁面的边界层分离现象。当边界层内流动从物面分离出来后，在物体后面形成尾涡区，将形成很大的尾涡阻力。边界层分离形成的涡旋，从物面脱落后将引起流体和固体产生耦合振动。

7.5.1　边界层分离现象

(1) 边界层脱体

如果边界层中压力沿流动方向急剧变化，会引起边界层分离。流体绕弯曲表面流动，边界层内的流动具有压力梯度。具有压力梯度的边界层流动的特点，可以利用图 7.5 来说明。

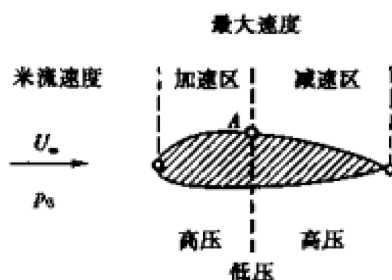


图 7.5　绕曲面流动的压力变化

在图 7.5 中曲面 A 点处，流体质点速度最大。在曲面 A 点以前，流体质点在运动过程中不断加速，速度变化$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x}>0$；在曲面 A 点以后不断减速，有速度变化

$\frac{du_x}{dx}<0$。流体趋向 A 点时，压力减低，压力变化$\frac{dp}{dx}<0$；通过 A 点以后，压力增加，压力变化$\frac{dp}{dx}>0$，流体在逆压梯度下运动。沿流动方向压力升高时，边界层增长比没有压力梯度时快；沿流动方向压力降低时，边界层增长较慢。如果外流加速，压力沿流动方向降低，存在顺压梯度。这种情况下，边界层内克服粘性阻力的不仅有流体流动的动量，还有顺压梯度的推动，使流体能够顺利地沿着物体表面向下游流动。如果外流减速，压力沿流动方向增大，存在逆压梯度。这种情况下，边界层内的逆压梯度和粘性阻力都对流体流动起着阻碍作用。当逆压梯度足够大时，物体表面附近的流体质点在逆压梯度作用下会停止前进或向上游回流。边界层外部流动的流体速度比边界层内部流体速度更大，其动量较大，能够克服逆压梯度继续向下游流动。于是，在边界层外部流动和物体表面之间形成回流现象。随着回流迅速向外扩展，边界层被越来越远地脱离物体表面，形成巨大的涡旋。这种边界层分离现象称为边界层脱体。

(2) 边界层的分离点

图 7.6 示意边界层的分离过程，即沿流动方向边界层中速度分布的不变化情况，图中虚线表示流体绕曲面的边界层厚度。当壁面处流体动量消耗完了时，在壁面 A 处出现速度为零的区域，该处速度梯度 $\frac{\partial u_x}{\partial y}=0$；在壁面 B 处，壁面附近的流体运动方向相反，速度梯度 $\frac{\partial u_x}{\partial y}<0$，而边界层外缘仍向前流动，在 b 处出现了拐点。这时，除了壁面上的流体速度为零外，拐点 b 处的速度也为零。紧靠壁面的边界层中顺流和回流在壁面 A 处交汇，该点处的速度梯度$\left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_{y=0}=0$，于是定义壁面上 A 点为边界层的分离点。

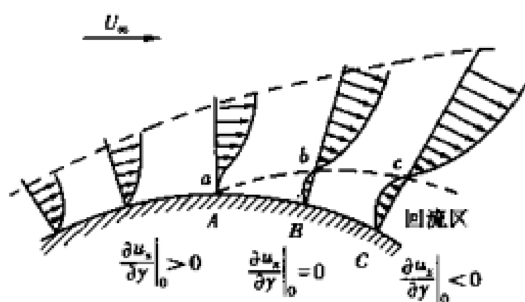


图 7.6　曲面边界层分离过程

在分离点的下游，壁面附近的流体运动方向与主流方向相反，虚线 abc 是分离开的边界层的边缘，点 a 与分离点 A 重合。分离边界层的边缘 abc 是边界层中顺流和回流的界线，称为零速度线。零速度线是不稳定的，任何微小扰动都会使之破裂，因此而产生涡旋。在分离点之后产生的尾涡区，里面充满了涡旋，压力减小了。对于圆柱绕流，如果以前驻点为起算点（$\theta=0$），尾流分离点的位置为 $\theta=81°$处，湍流可以推迟到 $\theta=130°$处分离。

(3) 分离条件

逆压梯度和壁面附近的粘性摩擦将引起边界层分离。但是，只有当压力梯度与切应力梯度相比足够大，才会发生边界层分离现象。对于层流，速度梯度的量级为$\frac{\partial u_x}{\partial y}\sim\frac{U}{\delta}$，粘性切应力则为$\mu\frac{U}{\delta}$，于是可得切应力梯度为$\mu\frac{U}{\delta^2}$，而压力梯度的量级为$\frac{dp}{dx}\sim-\rho U\frac{dU}{dx}$。压力梯度与切应力梯度相比，得到

$$\lambda=-\rho U\frac{dU}{dx}\Big/\mu\frac{U}{\delta^2}=-\frac{\delta^2}{\nu}\frac{dU}{dx}\tag{7.5.1}$$

7.5.2　涡旋诱发振动

(1)圆柱绕流

流体的物性、流场的几何条件和速度是影响流体流动的基本因素，它们综合起来的无因次数是雷诺数 Re。对于粘性流体，流体绕圆柱流动的流型随雷诺数 Re 不同，特别是在圆柱下游尾流中有很大差异。

当 Re≪1 时，属于小雷诺数 Re 圆柱绕流情形，流体绕圆柱流动上、下游对称的情况，与理想流体绕流的对称性很相似，即若流体来流反向，上、下游流型仍相同，如图 7.7 所示。但是对于粘性流体，柱体影响流场的区域比较广，即使在数倍于柱体直径的地方，流体速度与来流速度 U_∞ 还是不同。

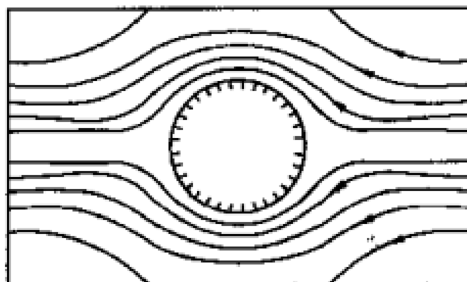


图 7.7　小雷诺数下绕圆柱体流动

中等雷诺数 Re 情况下的圆柱绕流，在边界层中产生了涡旋。当雷诺数 Re > 4 时，绕流在到达圆柱后驻点以前，便离开圆柱形成两个"附着涡"，涡内流体不断循环。图 7.8 表示了 Re = 10的圆柱绕流。随着雷诺数 Re 增大，涡旋也增大，在较高雷诺数下出现圆柱尾流。雷诺数 Re = 40 的圆柱绕流如图 7.9 所示。

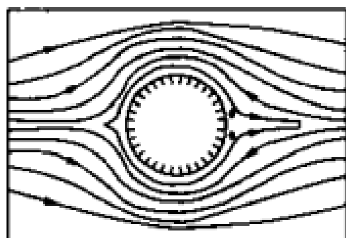


图 7.8　绕圆柱体的流动

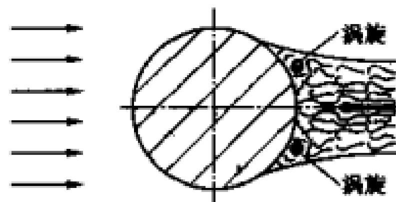


图 7.9　绕圆柱体的流动(Re = 40)

当雷诺数 Re > 40 时，圆柱后面的尾流是非定常性的，变得不稳定。这时尾流中速度出现规则脉动，在圆柱两侧会交替地发生旋涡脱落，并在尾流中排列形成两列旋涡，该涡列称为卡门涡街，如图 7.10 所示。

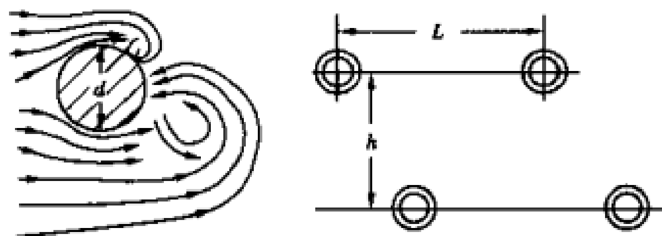


图 7.10　卡门涡街

如果雷诺数 Re 进一步增大，尾流中的涡旋变得更加不稳定，并分裂成更小的涡旋，速度变化也不规则。雷诺数 Re ~ 100 时，圆柱面上形成的边界层有分离现象。当雷诺数 Re > 200 时，尾流中的速度呈现强烈的不规则脉动，变成湍流尾流。

在雷诺数 Re < 3×10^5 的范围内，边界层中的流动为层流；雷诺数 Re > 3×10^5 后，边界层中的流动向湍流过渡。大雷诺数 Re 情况下的圆柱绕流，与中等雷诺数 Re 情况下的圆柱绕流已有很大差异。当雷诺数 Re > 3×10^6 时，边界层中的流动已全是湍流，尾流区比雷诺数 Re > 3×10^5时更窄，边界层分离点后移。不同雷诺数 Re 情况下边界层分离位置如图 7.11 所示。

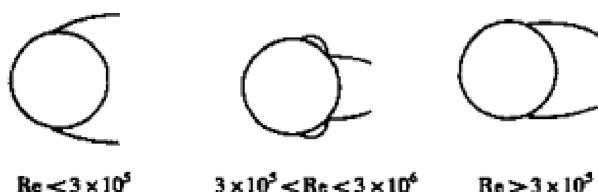


图 7.11　不同雷诺数的边界层分离

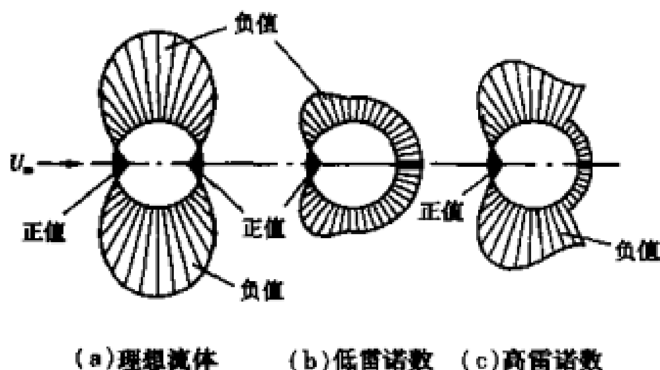


图 7.12　绕圆柱体的压力分布

随着雷诺数 Re 不同，圆柱绕流对柱体的压力分布也不同。图 7.12 表示了理想流体、小雷诺数和大雷诺数情况下圆柱绕流对柱体的压力分布。

(2)卡门涡街

当雷诺数 Re = 40 ~ 80 时，流体绕圆柱流动中将产生卡门涡街，如图 7.10 所示。卡门涡街是由一系列具有固定间距的二维单涡组成的，在柱体后面排列成为几乎平行的两条直线。卡门涡街中处于圆柱同一侧的单涡旋转方向相同，而处于圆柱两侧的单涡旋转方向则彼此相反。

卡门指出，大多数圆柱绕流中涡旋发射现象是不稳定的，因为涡旋的排列情况一般不能抵抗任何微小的扰动；只有当两排涡旋之间的距离 h 与同一列中相邻涡旋之间的距离 l 的比 (h/l) 为 0.2806 时，涡旋发射现象才是稳定的。

当圆柱绕流产生的涡旋发射现象是稳定的情况时，各个单涡相向旋转，交错地从柱体两边发射出来。涡旋发射频率与绕流速度，即与来流速度 U_∞ 成正比，与圆柱直径 d 成反比，设涡旋发射频率为 f，则 $f\propto\dfrac{U_\infty}{d}$。斯特罗哈数 St 是不定常流动的无量纲相似准数，如果选择涡旋发射周期 $T=1/f$ 为特征时间，来流速度 U_∞ 为特征速度，圆柱直径 d 为特征长度，斯特罗哈数 $\mathrm{St}=\dfrac{fd}{U_\infty}$。斯特罗哈数 St 是雷诺数 Re 的函数。

当 $250<\mathrm{Re}<10^5$ 时，表示斯特罗哈数 St 的经验公式为

$$\mathrm{St}=\frac{fd}{U_\infty}=0.198\left(1-\frac{19.7}{\mathrm{Re}}\right)\qquad(7.5.2)$$

在 $10^3<\mathrm{Re}<10^5$ 的区间内，斯特罗哈数 St 近似为常数，即 St = 0.2。

圆柱绕流发射的涡旋在以绕流速度 U_∞ 向下游流动外，还以相对速度 u 流向柱体，因此涡旋向下游流动的绝对速度为 $U_\infty-u$。通过计算，可以得出涡旋相对于绕流速度 U_∞ 的回流速度为

$$u=\frac{\Gamma}{2l}\mathrm{th}\frac{\pi h}{l}\qquad(7.5.3)$$

式中 Γ 是涡旋的环量。

涡旋从圆柱体脱落后产生的环量，引起作用于柱体的不平衡的横向力。当涡旋从圆柱体两边交替发射时，不平衡的横向力也发生周期性变化，迫使圆柱体振动。如果作用力的频率接

近圆柱体系统的固有(自然)频率,将发生共振。

7.6 润滑理论

设高速运转的轴承和轴套之间充满了润滑油。在轴承高速运转产生的巨大压差作用下,润滑油形成偏心圆环状的油膜层,将轴承托起避免与轴套直接接触,从而起到润滑作用。润滑理论是粘性力起作用的小雷诺数问题,但是由于润滑油层内的流动与边界层内的流动很相似,可以利用边界层理论中的量阶估计方法来简化润滑理论中的计算。

7.6.1 油膜运动方程组

(1)倾斜平板近似模型

将轴承和轴套之间充满油膜的间隙划分Ⅰ为Ⅱ和两部分,AC 处是最小间距,BD 处是最大间距,如图7.13所示。在第Ⅰ部分中,轴承运动时带动油膜向最小间距方向运动,在第Ⅱ部分中,轴承运动时带动油膜向最大间距方向运动。A 与 B 处的压力相等,均为 p_0。由于轴承半径比油膜间隙大得多,可以近似将轴承表面 AB 和轴套壁面 CD 视为平板。于是,润滑油在轴承和轴套之间油膜间隙中的流动,就可以近似为粘性流体在倾斜平板之间的流动。在无界平面导板上建立直角坐标系 $oxyz$,坐标原点为 o,导板在 xz 平面内以常速度 U 沿 x 方向运动,如图7.14所示。导板上方不远处有一块固定不动的有限长平板,与 xz 平面之间有一个很小的倾斜角度 α。如果固定平板在 z 方向的尺度,两板之间的间隙相比足够大,两板之间的流体流动可以认为是二维平面的,即 xy 平面内的流动。在两平板之间充满润滑油,两端压力均为常数 p_0。在距离原点 o 的 x 坐标处,两平板之间 y 方向高度为 $h(x)$,两端分别为 h_1 和 h_2。设固定平板在 ox 轴上的投影为 l,则

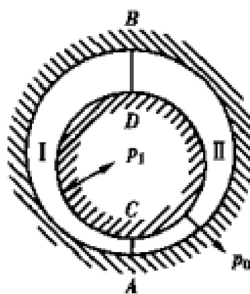


图7.13　油膜间隙

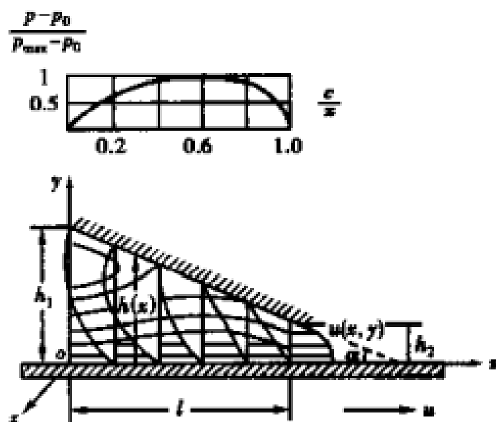


图7.14　倾斜平板之间的流动

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\bigg/\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0(\varepsilon^2) \tag{7.6.1}$$

其中

$$m = \tan\alpha = \frac{h_1 - h_2}{l} \tag{7.6.2}$$

(2)油膜运动方程组

假定 $h(x)\ll l$，则 $\varepsilon=h_1/l$ 或 $\varepsilon=h_2/l$ 可以看做小量。类似边界层理论中的量阶估计，如果以 ε 作为估阶标准，可以得到

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\Bigg/\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}=0(\varepsilon^2)$$

和

$$\frac{\partial p}{\partial y}\Bigg/\frac{\partial p}{\partial x}=0(\varepsilon)$$

作为一级近似，近似认为 $\frac{\partial p}{\partial y}=0$，即压力 $p=p(x)$ 穿过油膜薄层不变。

通过对粘性不可压缩流体运动方程组各项的量阶估计，考虑到油膜平面运动的定常性，方程组中的运动方程简化为

$$\rho\left(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \tag{7.6.3}$$

方程组中的连续性方程为

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0 \tag{7.6.4}$$

运动方程(7.6.3)中，惯性力与粘性力之比的量阶为

$$\rho u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}\Bigg/\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}=\frac{\rho U^2}{l}\Bigg/\frac{\mu U}{h_1^2}=\frac{\rho U l}{\mu}\left(\frac{h_1}{l}\right)^2=\mathrm{Re}\varepsilon^2 \tag{7.6.5}$$

上式表明惯性力比粘性力小得多，可以忽略不计，于是运动方程(7.6.3)进一步简化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \tag{7.6.6}$$

由于定常流动横截面上流量等于常数，连续性方程(7.6.4)可以表示为

$$Q=\int_0^{h(x)}u\mathrm{d}y=\text{常数} \tag{7.6.7}$$

边界条件为

$$y=0:u_x=U;\quad y=h:u_x=0 \tag{7.6.8}$$

$$x=0:p=p_0;\quad x=l:p=p_0 \tag{7.6.9}$$

简化后最终得到的油膜运动方程组由(7.6.6)和(7.6.7)式组成，边界条件为(7.6.8)和(7.6.9)式。

7.6.2 压力分布和速度分布

(1)压力分布

对运动方程(7.6.6)积分两次，考虑到边界条件(7.6.8)，得

$$u_x=U\left(1-\frac{y}{h}\right)-\frac{h^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right) \tag{7.6.10}$$

压力 p 沿 x 方向的变化 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ 不是常数，利用流量方程(7.6.7)和边界条件(7.6.9)，可以确定 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$。将速度分布表达式(7.6.10)代入流量方程(7.6.7)，得

$$Q = \frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{7.6.11}$$

由上式可得 x 方向的压力变化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 12\mu\left(\frac{U}{2h^2} - \frac{Q}{h^3}\right) \tag{7.6.12}$$

设 $h = h^*$ 处，$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$，(7.6.11)式改写成

$$Q = \frac{U}{2}h^* \tag{7.6.13}$$

将上式代入(7.6.12)式得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\frac{6\mu U}{m}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{h^*}{h^3}\right) \tag{7.6.14}$$

式中已考虑到$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = -m$。积分(7.6.14)式得

$$p = \frac{6\mu U}{m}\left(\frac{1}{h} - \frac{h^*}{2h^2}\right) + C \tag{7.6.15}$$

由边界条件(7.6.9)式可以确定 h^* 和积分常数 C，即

$$h^* = \frac{2h_1h_2}{h_1 + h_2} \tag{7.6.16}$$

$$C = p_0 - \frac{6\mu U}{mh_1}\left(1 - \frac{h_2}{h_1 + h_2}\right) \tag{7.6.17}$$

代入(7.6.15)式得

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{6\mu U}{m}\frac{1}{h} - \frac{1}{h_1} - \frac{h_1h_2}{h_1 + h_2}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_1^2}\right) = \\ & p_0 + 6\mu Ul\frac{(h_1 - h)(h - h_2)}{h^2(h_1^2 - h_2^2)} \end{aligned} \tag{7.6.18}$$

将 $h = h^*$ 代入上式得

$$p_{max} = p_0 + 6\mu Ul\frac{h_1 - h_2}{4h_1h_2(h_1 + h_2)} \tag{7.6.19}$$

由(7.6.18)式和(7.6.19)式可得

$$\frac{p - p_0}{p_{max} - p_0} = \frac{4h_1h_2(h_1 - h)(h - h_2)}{h^2(h_1 - h_2)^2} \tag{7.6.20}$$

注意到图 7.14 中表示的几何关系

$$\frac{h_1 - h}{h_1 - h_2} = \frac{x}{l}, \quad \frac{h - h_2}{h_1 - h_2} = 1 - \frac{x}{l}$$

(7.6.20)式可以改写成 x/l 的函数形式，据此，在图 7.14 中画出了压力分布图。容易证明

$$\frac{h^*}{(h_1 + h_2)/2} = \frac{4h_1h_2}{(h_1 + h_2)^2} < 1 \tag{7.6.21}$$

上式表明，h^* 截面处表示的压力极大值并不在中间截面处，即不在 $h = \frac{h_1 + h_2}{2}$处，而是靠近最

小截面 $h=h_2$ 处，这点由图 7.14 中的压力分布图可以看出。

(2)速度分布

将(7.6.14)式代入(7.6.10)式，得到速度分布为

$$u_x = U\left(1-\frac{y}{h}\right)\left[1+\frac{3y}{mh}\left(1-\frac{h^*}{h}\right)\right] \tag{7.6.22}$$

在图 7.14 中画出了速度分布图和流线谱。从图上可以看出，倒流发生在静止固壁附近压力升高的区域。

7.6.3 合力和合力矩

(1)合压力

长为 l 的运动平板上的合压力 P 为

$$P = \int_0^l (p-p_0)\mathrm{d}x = \frac{6\mu Ul^2}{(k-1)^2h_2^2}\left[\ln k - \frac{2(k-1)}{k+1}\right] \tag{7.6.23}$$

其中 $k=h_1/h_2$。合压力 P 的大小依赖于 k 的数值。因为当 $k=1$ 或 $k=\infty$ 时，$P=0$，所以，合压力 P 在该区间一定有极值。为求 P 的极值，对(7.6.23)式取导数，得到 k 应满足的超越方程为

$$k^3+5k^2-5k-1-2k(k+1)^2\ln k = 0$$

上面超越方程的数值解 $k=2.2$。当 $k=2.2$ 时，P 的极大值为

$$P = 0.16\frac{\mu Ul^2}{h_2^2} \tag{7.6.24}$$

(2)合粘性应力

长为 l 的运动平板壁上的粘性切应力 τ_0 为

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_0 = -\frac{\mu}{h}U - \frac{1}{2}h\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mu U}{h}\left(4-\frac{3h^*}{h}\right) \tag{7.6.25}$$

于是，合粘性应力为

$$F = -\int_0^l \tau_0\mathrm{d}x = \frac{\mu Ul}{(k-1)h_2}\left[4\ln k - \frac{6(k-1)}{(k+1)}\right] \tag{7.6.26}$$

合粘性应力绝对值与合压力绝对值的比值为

$$\frac{|F|}{|P|} = \frac{\left|2\ln k - 3\frac{k-1}{k+1}\right|(k-1)}{\left|\ln k - 2\frac{k-1}{k+1}\right|}\frac{h_2}{l} \tag{7.6.27}$$

上式表明，比值 $|F|/|P|$ 正比于小量 h_2/l，这意味变厚度的粘性流体（油膜）运动可以产生远大于摩擦阻力（合粘性应力）的支撑力（合压力）。由(7.6.23)式可知道，支撑力 $|P|$ 的量阶为 $1/\varepsilon^2\sim(l/h_2)^2$，因此，支撑力 $|P|$ 是一个数值上比摩擦阻力 $|F|$ 大得多的量。

当 P 按(7.6.24)式取极大值时，合粘性应力和比值 $|F|/|P|$ 的大小为

$$F = 0.75\frac{\mu Ul}{h_2},\quad \frac{|F|}{|P|} = 4.7\frac{h_2}{l} \tag{7.6.28}$$

(3)合力矩

在长为 l 的滑动平板壁上，油膜运动产生的合力矩 L 为

$$L=\int_0^l(p-p_0)x\mathrm{d}x=\frac{h_1}{m}P+\frac{6\mu Uh_2}{m^3}\left[\frac{1}{2}(1-k)+\frac{k}{k+1}\ln k\right] \qquad (7.6.29)$$

由合力矩 L 和合压力 P,可以求出合压力 P 作用点 x_c 的位置

$$x_c=\frac{L}{P}=\frac{l}{2}\left[\frac{2k}{k-1}-\frac{k^2-1-2k\ln k}{(k^2-1)\ln k-2(k-1)^2}\right] \qquad (7.6.30)$$

当合压力 P 取极大值时,合压力 P 作用点 $x_c=0.57l$,即在 $(0,l)$ 区间的中点附近,向右边最窄端靠拢。

如果运动平板不是朝着最小截面方向运动,而是朝着最大截面方向运动,即将以上推导的所有公式中平板速度 U 换为 $-U$,于是,运动平板受到的是压向面定板的作用力,不是受到推开的支撑力。

在缓慢的变薄层粘性流体流动中,产生高压是油膜润滑流动的特点。上述理论计算是在二维平面运动的假定下进行的,假定中认为轴承在 z 方向无限,粘性系数是常数。事实上,轴承在 z 方向的尺度是有限的,而且由于摩擦生热使轴承温度升高,油膜的支撑力和粘度都将急剧降低。这种情况下求一次近似解失效,因为惯性力与粘性力之比的量阶 $Re\varepsilon^2$ 可以接近1或大于1,惯性力与粘性力相比已不能忽略,必须将惯性力作为外力,再去求二次近似解。本节介绍的方法可以推广到圆筒及偏心圆柱之间的粘性流体运动计算中去。

7.7 圆管层流流动

流体在不同形状的管内流动,流动状态和流动规律一般是不相同的。管内流体流动是层流状态时,流体速度大小沿管径变化,速度分布呈抛物线型,层流阻力与速度的一次方成正比。管内流体流动是湍流状态时,管中心部分流体速度大小沿管径变化平坦,管壁附近的流体速度变化陡峭,湍流阻力近似与速度的平方成正比。管内流动的速度分布和压力分布,可以通过实验测量或计算获得。管道复杂的几何形状对流体流动状态有显著影响。圆管层流流动状态是比较简单、也最为常见的一类流动形式。

7.7.1 进口段流动

流体在管道进口处,速度分布沿整个管截面是近似均匀的。由于流体的粘性,靠近管壁的一层流体附着在管壁上,这层流体与管壁的相对速度为零。如果流量沿管长不变,在距离进口的一段长度内,管道中心流速不断增大,直到管内速度分布不再随管长发生变化,这段管长称为进口段,如图7.15所示。进口段内发展着的流动与壁面绕流情况相似,因此,讨论进口段内的流动问题需要应用边界层理论。进口段以后的流动称为充分发展了的流动。



图7.15 圆管进口段的速度分布

管道进口处的边界层厚度为零,流体速度是均匀分布的。随着流体向下游流动,管壁上边界层厚度不断增加,流体速度不是均匀分布的,存在轴向速度梯度 $\frac{\partial u_x}{\partial x}$。当边界层厚度发展到

与管半径大小相当时，流体速度分布不再发生变化，管内流动成为充分发展了的流动，速度矢量的矢端曲线呈抛物线型。从管道进口处到管流充分发展这一段距离 L_e 就是进口段长度。在边界层中，流体流动受到管壁的阻滞作用，流体速度沿半径变化，存在径向速度梯度$\frac{\partial u_z}{\partial r}$。管流边界层之外是有势流动，径向速度梯度为零。由于沿流动方向边界层厚度逐渐增加，管截面势流核心区逐渐减小，因此，流体在势流核心区的流动加速，产生压降，增加了附加阻力。

进口段中流体未充分发展，沿管长存在压差 Δp。进口段压差计算公式为

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \lambda \frac{x}{d} + m \tag{7.7.1}$$

其中$\frac{1}{2}\rho U^2$ 是单位体积质量的动能；λ 是流动充分发展时的摩擦阻力系数；U 是管截面平均速度；m 是校正系数，通常取 $m = 1.31$。

当雷诺数 $\mathrm{Re} < 2100$ 时，管内流动是层流状态，进口段长度 L_e 可由下式近似计算

$$\frac{L_e}{d} = 0.59 + 0.055\mathrm{Re} \tag{7.7.2}$$

其中 d 是管径。湍流情况下，进口段长度 L_e 的计算式为

$$\frac{L_e}{d} = 1.4(\mathrm{Re})^{\frac{1}{4}} \tag{7.7.3}$$

湍流边界层厚度比层流边界层厚度增长快，因此，湍流进口段长度比层流进口段长度更短。一般计算中，层流进口段长度大致可取为 $100d$，湍流进口段长度大致为 $50d$。

7.7.2 定常流动运动方程

在管半径为 R、长度为 L 的圆截面水平直管内，流体沿管轴线作轴对称定常流动。建立柱坐标系(r,θ,z)，管轴线为 z 轴，如图 7.16 所示。流体沿管轴 z 方向作轴对称定常流动，流动是充分发展的，管内压力和速度分量不随时间变化。

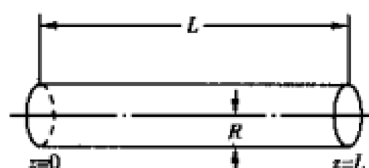


图 7.16 圆管定常流动

管内压力为

$$p = p(r,z) \tag{7.7.4}$$

压差 Δp 的大小为

$$\Delta p = p_l - p_0 \tag{7.7.5}$$

其中 p_0 是 $z=0$ 处的压力，p_L 是 $z=L$ 处的压力。

速度分量为

$$u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \quad u_z = u_z(r) \tag{7.7.6}$$

由上式中第三式得到

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0 \tag{7.7.7}$$

于是，圆管层流定常流动的柱坐标系运动方程为

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial z} + \mu\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}\right) \end{cases} \tag{7.7.8}$$

由上式可知管内压力 p 与 r,θ 无关,(7.7.4)式变为

$$p = p(z) \tag{7.7.9}$$

因此可以改写 p 对 z 的导数形式为$\dfrac{\partial p}{\partial z}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$,引入(7.7.8)式得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \mu\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}\right) \tag{7.7.10}$$

上式左端是 z 的函数,右端是 r 的函数,只有两端等于同一常数 C 时,(7.7.10)式才成立。设常数 $C=\dfrac{\Delta p}{L}$,则$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=\dfrac{\Delta p}{L}$,将之代入(7.7.10)式,运动方程(7.7.8)变为

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}\right) = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\Delta p}{L} \end{cases} \tag{7.7.11}$$

7.7.3　管流速度分布

对运动方程(7.7.11)式积分,得

$$u_z = \frac{\Delta p}{4\mu L}r^2 + C_1\ln r + C_2 \tag{7.7.12}$$

边界条件为

$$r = 0,\quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0;\quad r = R,\quad u_z = 0 \tag{7.7.13}$$

由边界条件可定出积分常数

$$C_1 = 0,\qquad C_2 = -\frac{\Delta p}{4\mu L}R^2 \tag{7.7.14}$$

将上式代入(7.7.12)式,得到等直圆管定常流动的速度分布

$$u_z = -\frac{\Delta p}{4\mu L}(R^2 - r^2) = \frac{R^2}{4\mu}\left(-\frac{\Delta p}{L}\right)\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \tag{7.7.15}$$

(7.7.15)式是抛物线方程,所以管截面上的速度是按抛物线分布的。当 $r=0$ 时,由(7.7.15)式得到管中心的速度,即管截面上的最大速度为

$$(u_z)_{\max} = \frac{R^2}{4\mu}\left(-\frac{\Delta p}{L}\right) \tag{7.7.16}$$

7.7.4　哈根-泊稷叶公式

通过管截面的流量为

$$Q = \int_A u_z \mathrm{d}A = 2\pi\int_0^R u_z r\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^R\left(-\frac{\Delta p}{4\mu L}\right)(R^2 - r^2)r\mathrm{d}r = -\frac{\pi\Delta p}{2\mu L}\int_0^R (R^2 - r^2)r\mathrm{d}r \tag{7.7.17}$$

上式称为哈根-泊稷叶公式，它表明层流时流量正比于单位管长上的压降以及管半径的四次方。这一规律是哈根和泊稷叶先后与1839年和1840年通过实验发现的。哈根-泊稷叶公式对于管道阻力研究有重要意义，在工程中应用很广泛。

管截面上的平均速度 U 可以由流量 Q 除以截面面积 A 得到，即

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{\pi R^4}{8\mu}\cdot\left(-\frac{\Delta p}{L}\right)}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8\mu}\left(-\frac{\Delta p}{L}\right) \tag{7.7.18}$$

将上式与(7.7.16)式比较，可知平均速度 U 是最大速度 $(u_z)_{max}$ 之半，即

$$\frac{U}{(u_z)\max} = \frac{1}{2} \tag{7.7.19}$$

任意半径 r 处的速度可以用平均速度 U 来表示，速度分布式(7.7.15)改写为

$$u_z = (u_z)_{max}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = 2U\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \tag{7.7.20}$$

7.7.5 阻力公式

等直圆截面管内，流体作定常流动时受到的阻力可以用单位管长上的压降来表示。于是由(7.7.18)式得

$$\frac{\Delta p}{L} = -\frac{8\mu U}{R^2} \tag{7.7.21}$$

上式表明，层流时阻力与速度一次方成正比。改写(7.7.21)式为

$$\Delta p = -\frac{8\mu U}{d^2/4}\cdot\frac{2d}{\rho U^2}\cdot\frac{L}{d}\cdot\frac{\rho U^2}{2} = -\frac{64}{\rho dU/\mu}\cdot\frac{L}{d}\cdot\frac{\rho U^2}{2} \tag{7.7.22}$$

在上式中引人摩擦阻力系数 λ

$$\lambda = \frac{64}{\rho dU/\mu} = \frac{64}{\mathrm{R_e}} \tag{7.7.23}$$

(7.7.22)式可以写成

$$\Delta p = -\lambda\frac{L}{d}\left(\frac{\rho U^2}{2}\right) \tag{7.7.24}$$

7.7.6 壁面上的切应力

管壁上的切应力可以通过积分运动方程(7.7.11)式来求得。根据牛顿粘性定律，有

$$\tau_{rz} = -\mu\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r} \tag{7.7.25}$$

将上式代人运动方程(7.7.11)中的第三式，积分得

$$\tau_{rz} = -\frac{\Delta p}{L}\cdot\frac{r}{2} + \frac{C}{r} \tag{7.7.26}$$

其中积分常数 $C=0$，这是由 $r=0$ 时切应力为有限值所确定的。于是得

$$\tau_{rz} = -\frac{\Delta p}{2L}\cdot r \tag{7.7.27}$$

上式表明，管截面上的切应力呈线性分布。在管壁上

$$r = R,\qquad \tau_{rz} = \tau_w \tag{7.7.28}$$

代入(7.7.27)式得管壁上的切应力为

$$\tau_w = -\frac{\Delta p}{2L}\cdot R \tag{7.7.29}$$

管壁上切应力与单位体积质量的动能之比，称为范宁摩擦因子f，即

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} \tag{7.7.30}$$

由(7.7.22)式、(7.7.23)式、(7.7.29)式和(7.7.30)式，可得范宁摩擦因子f的计算式

$$f = \frac{\lambda}{4} = \frac{16}{\mathrm{Re}} \tag{7.7.31}$$

由上式可知，层流摩擦阻力系数λ在数值上是范宁摩擦因子f的4倍，或者说，范宁摩擦因子f与雷诺数N_{Re}的乘积为定数16。

实验研究中，通过测定沿管长的压降Δp，应用管壁切应力公式(7.7.29)即可获得管壁上的切应力τ_w。由于测定压降Δp比较容易，所以管壁切应力公式(7.7.29)在工程中有重要的实际意义。

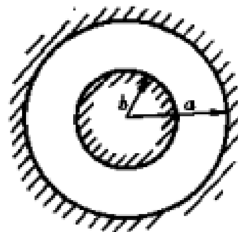
对于管内湍流流动问题，需要应用湍流半经验理论来处理。为了研究的便利，通常将管内湍流流动问题分为光滑管和粗糙管内流动两大类。由圆截面水平直管内层流流动推导出的切应力公式(7.7.29)也适用于湍流流动。对于湍流流动，(7.7.29)式中的切应力τ是粘性切应力与湍流附加应力之和。(7.7.29)式表明，管截面上一点处的切应力τ与该点至管轴线的距离r成正比；在管壁上切应力τ有最大值τ_w。

习　　题

7.1　一圆管半径为R，长为L，轴线与铅垂方向夹角为α。当粘性不可压缩流体定常流过圆管时，管端压力分别为p_0和p_L，忽略管端效应，求管内速度分布u_z和体积流量Q。

$\left(答案：u_z = \dfrac{[p_0-(p_L-\rho gL\cos\alpha)]R^2}{4\mu L}\left[1-\left(\dfrac{r}{R}\right)^2\right],\ Q=\dfrac{\pi[p_0-(p_L-\rho gL\cos\alpha)]R^4}{8\mu L}\right)$

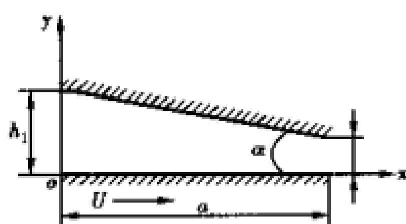
7.2　两个同轴圆柱面之间的粘性不可压缩流体在压力梯度作用下作定常运动。两个同轴圆柱面的半径分别为a和b，轴线方向长度无限。设管轴线方向的压力梯度为常数，若不计外力，试求柱面之间流体流动的速度分布u_z以及管壁上所受到的粘性摩擦力$\tau|_{r=a}$和$\tau|_{r=b}$。



题7.2附图

$\left(答案：u_z = \dfrac{A_0}{4\mu}\left[(a^2-r^2)+(a^2-b^2)\dfrac{\ln(r/a)}{\ln(a/b)}\right]，其中 A_0 = -\dfrac{\partial p}{\partial z},\right.$

$$\tau|_{r=a}=-\frac{A_0}{2}a+\frac{A_0(a^2-b^2)}{4a\ln(a/b)},\tau|_{r=b}=-\frac{A_0}{2}b+\frac{A_0(a^2-b^2)}{4b\ln(a/b)}\Big)$$



题7.3附图

7.3 在非常靠近的两块倾斜平板之间的缝隙中，粘性不可压缩流体由于平板的运动产生流动。设与下板倾斜的上板宽度有限而长度无限，下板是无限平面，两板的夹角为 α，上板在下板上的投影宽度为 a。板间两端通道的距离分别为 h_1 和 h_2，在运动过程中保持固定不变。下板以较小的速度 U 沿 x 轴的正方向运动。若通道进、出口的流体压力相等，不计外力，求速度分布 u、压力分布 $p-p_0$、流量 Q 和流体作用在运动平板上的总压力 F_y。

$$\Big(\text{答案}:u=\frac{6U}{2h^2}1-\frac{2h_1h_2}{h(h_1+h_2)}(y^2-hy)+\frac{U}{h}(h-y),\ Q=\frac{h_1h_2}{h_1+h_2}$$

$$p-p_0=\frac{6\mu Ux(a-x)(h_1-h_2)}{a(h_1+h_2)(h_1-\alpha x)^2},\ F_y=\frac{6\mu U}{a^2}\ln\frac{h_1}{h_2}-\frac{2(h_1-h_2)}{h_1+h_2}\Big)$$

7.4 一半径为 a 的球沉没在很粘的不可压缩流体中，球绕其本身的直径以很小的等角速度 ω 旋转，带动流体发生运动。设压力在运动过程中保持不变，若不计外力，求作用在球上的总摩擦力矩 M。（答案：$M=-8\pi\mu a^3\omega$）

7.5 设一半径充分大的平面圆盘，绕与它垂直的轴线在粘性不可压缩流体中作等角速度旋转，试证沿圆盘面边界层厚度是常数。

7.6 粘性不可压缩流体以速度 U 流进一根直径为 d 的细圆直管，边界层自管口开始生长。取管轴为 x 轴，原点在管口，离管口 l 处实现圆管泊稷叶层流流动，问 l 等于多少？（答案：$l=0.03d\mathrm{Re}$，其中雷诺数 $\mathrm{Re}=Ud/\nu$）

7.7 一个圆球放在流速为 1.6m/s 的水中，受到阻力为 4.4N。另一个直径为其两倍的圆球置于一风洞中，求在动力相似条件下风速 u 的大小及球所受的阻力 F（$\nu_{空气}/\nu_{水}=13$，$\rho_{空气}=1.28\mathrm{kg/m^3}$）。（答案：$u=10.4\mathrm{m/s}$，$F=0.865\mathrm{N}$）

7.8 试证明两个无限大固定平板间层流流动的平均流速是最大流速的 2/3。

7.9 沿平板流动的两种介质，一种是标准状态的空气，其流速为 30m/s，另一种是 20℃ 的水，其流速为 1.5m/s，求二者在同一位置处的层流边界层厚度之比。（答案：0.07）

附录 SI 单位

单位度量名称	类别	名称	符号 中文	符号 国际	用基本单位表示的关系
长度	基本单位	米	米	m	m
质量	基本单位	千克(公斤)	千克(公斤)	kg	kg
时间	基本单位	秒	秒	s	s
热力学单位	基本单位	开尔文	开尔文	K	K
平面角	辅助单位	弧度	弧度	rad	
立体角	辅助单位	球面度	球面度	sr	
力	导出单位	牛顿	牛	N	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
力矩	导出单位	牛顿米	牛·米	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
压力/压强/应力	导出单位	帕斯卡	帕	Pa	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
表面张力	导出单位	牛顿每米	牛/米	N/m	$kg \cdot s^{-2}$
密度	导出单位	千克每立方米	千克/米^3	kg/m^3	$m^{-3} \cdot kg$
动力粘度	导出单位	帕斯卡秒	帕斯卡·秒	$Pa \cdot s$	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-1}$
能/功/热量	导出单位	焦耳	焦	J	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
功率	导出单位	瓦特	瓦	W	$m \cdot kg \cdot s^{-3}$
热容/熵	导出单位	焦耳每开尔文	焦/开	J/K	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
比热容/比熵	导出单位	焦耳每千克开尔文	焦/(千克·开)	$J/(kg \cdot K)$	$m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
比能	导出单位	焦耳每千克	焦/千克	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$
导热系数	导出单位	瓦特每米开尔文	瓦/(米·开)	$W/(m \cdot K)$	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}$
面积	导出单位	平方米	米^2	m^2	m^2
体积	导出单位	立方米	米^3	m^3	m^3
比容/比体积	导出单位	立方米每千克	米^3/千克	m^3/kg	$m^3 \cdot kg^{-1}$
速度	导出单位	米每秒	米/秒	m/s	$m \cdot s^{-1}$
加速度	导出单位	米每秒平方	米/秒^2	m/s^2	$m \cdot s^{-2}$
角速度	导出单位	弧度每秒	弧度/秒	rad/s	
角加速度	导出单位	弧度每秒平方	弧度/秒^2	rad/s^2	
频率	导出单位	赫兹	赫	Hz	s^{-1}

参 考 文 献

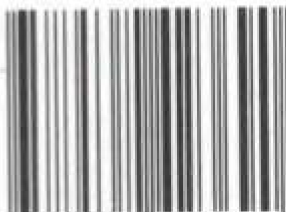
1. 郑洽馀，鲁钟琪主编. 流体力学. 北京：机械工业出版社，1980 年 3 月第一版
2. 吴望一编著. 流体力学（上册）. 北京：北京大学出版社，1982 年 8 月第一版
3. 吴望一编著. 流体力学（下册）. 北京：北京大学出版社，1983 年 3 月第一版
4. 赵学瑞，廖其奠主编. 粘性流体力学. 北京：机械工业出版社，1983 年 6 月第一版
5. R. D. 白莱文斯著. 吴恕三，王觉等译. 流体诱发振动. 北京：机械工业出版社，1983 年 4 月第一版.
6. 戴干策，陈敏恒编著. 化工流体力学. 北京：化学工业出版社，1988 年 4 月第一版
7. 孔珑主编. 工程流体力学. 北京：水利电力出版社，1992 年 11 月第二版
8. 傅德薰主编. 流体力学数值拟. 北京：国防工业出版社，1993 年 11 月第一版
9. G. K. 巴切勒著. 沈青，贾复译. 流体动力学引论. 北京：科学出版社，1997 年 11 月第一版

21世纪 高等学校本科系列教材

LIUTI LIXUE

土木工程专业

1. 高等数学（上、下）
2. 线性代数
3. 概率论与数理统计
4. 大学化学
5. 大学物理
6. 计算机文化基础
7. 软件技术基础
8. 微机原理及应用
9. 画法几何
10. 工程制图与计算机绘图
11. 理论力学
12. 材料力学
13. 结构力学 Ⅰ
14. 结构力学 Ⅱ
15. 弹性力学
16. 流体力学
17. 水力学
18. 土力学
19. 岩石力学
20. 工程地质学
21. 土木工程材料
22. 测量学
23. 荷载与结构设计方法
24. 混凝土结构设计原理
25. 砌体结构
26. 钢结构
27. 组合结构设计原理
28. 基础工程
29. 土木工程施工
30. 建设项目管理
31. 工程概预算
32. 工程经济学
33. 建筑电气
34. 房屋建筑学
35. 多高层建筑结构设计
36. 工程结构抗震设计
37. 机械零件及建筑机械
38. 建筑美学
39. 室内设计与装饰
40. 房屋结构设计
41. 建筑设备
42. 土木工程建设监理
43. 建筑结构 CAD
44. 建筑结构试验
45. 隧道工程
46. 桥梁工程
47. 路基路面工程
48. 道路勘测设计


ISBN 7-5624-2369-5
9 787562 423690 >

ISBN 7-5624-2369-5/O・199
定 价：16.00元